Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGEMBANGAN TEOREMA CEVA PADA SEGILIMA

Nevi Annersih[1], Mashadi[2], M. D. H. Gamal[2]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2]Universitas Riau
e-mail: nevi.annersih@gmail.com

Abstract

This paper discusses the development of the Ceva's theorem on the pentagon in various cases including for the convex pentagon and the nonconvent pentagon. The Ceva's theorem discusses the case of one-point concurrent in the pentagon. The proofing process is done in a simple way that is by using wide comparison. The results obtained from this paper are the existence of five lines from each vertex on the pentagon intersected at one point (concurrent) ie point P.

Keywords: Ceva theorem, Ceva's theorem on the pentagon, concurrent

Abstrak

Tulisan ini membahas tentang pengembangan teorema Ceva pada segilima dalam berbagai kasus antara lain untuk segilima konveks dan segilima nonkonveks. Teorema Ceva segilima membahas kasus kekonkurenan satu titik yang berada pada segilima. Proses pembuktian dilakukan dengan cara sederhana yaitu dengan menggunakan perbandingan luas. Hasil yang diperoleh dari tulisan ini adalah eksistensi lima buah garis dari masing-masing titik sudut pada segilima berpotongan di satu titik (konkuren) yaitu titik P.

Kata kunci: teorema Ceva, teorema Ceva pada segilima, konkurensi

Geometri adalah ilmu yang membahas tentang titik, garis dan bidang datar dengan sifat-sifatnya, maupun beberapa objek yang terbentuk darinya seperti sudut dan segitiga, serta aksioma-aksioma yang terpenuhi (Belyaev, 2007). Teorema Ceva termasuk salah satu teorema pada cabang bidang geometri yaitu *plane geometry*. Dalam (Grunbaum, 1995) dinyatakan bahwa Giovanni Ceva (1648-1734) membuktikan sebuah teorema dalam kursus geometri dasar yaitu teorema ceva pada segitiga (dan menemukan kembali Teorema Mene-laus) pada abad ke-17.

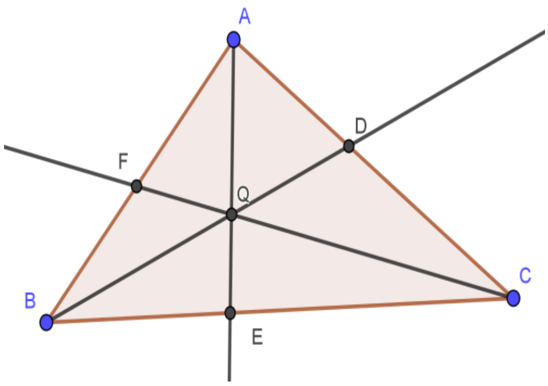
Pada dasarnya teorema Ceva segitiga telah banyak dibahas oleh beberapa penulis diantaranya (Benitez, 2007; Landy, 1988; Grunbaum, 1995; Mashadi, 2015) menyatakan teorema Ceva pada segitiga digunakan untuk menunjuk-kan tiga buah garis berpotongan di satu titik (konkuren). Selain itu (Mashadi, 2015) membahas kembali teorema Ceva segitiga untuk kasus tiga buah garis juga berpotongan di satu titik yang berada di luar segitiga dengan menggunakan prinsip perbandingan luas dan prinsip kese-bangunan.

Dalam (Mashadi, 2015; Mashadi,

2015; Mashadi, 2016) menyatakan bahwa bentuk teorema Ceva pada segi tiga yaitu, jika *D*, *E* dan *F* masing-masing adalah titik pada garis *BC*, *CA* dan *AB* pada segitiga *ABC*. Maka garis *AD*, *BE* dan *CF* adalah berpotongan disatu titik jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1,$$

seperti terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi Ceva pada Segitiga

Selanjutnya dalam penelitian (Nurahmi, 2015) telah dibahas teorema Ceva pada segiempat yaitu berpotongan di satu titik yang berada di dalam segiempat, Nurahmi juga mengembang-kan teorema Ceva ini dengan men ggunakan prinsip perbandingan luas. Adapun bentuk Teorema ceva pada segiempat yaitu misalkan segiempat $A_1A_2A_3A_4$ dan P adalah titik yang diberikan. Misalkan pula B_i adalah titik potong garis PA_1 dengan ruas $A_{i-1}A_{i+1}$ untuk $i = 1,2,3,4$ dengan $A_0 = A_4$ dan $A_5 = A_1$ maka berlaku

$$\prod_{i=1}^{4}\left[\frac{A_{i-1}B_i}{B_iA_{i+1}}\right] = 1$$

Kasus lain dari teorema Ceva segiempat yaitu empat buah garis berpotongan di satu titik yang berada di luar segiempat konveks dan non konveks seperti yang di kemukan dalam (Mashadi, 2016). Beberapa jurnal juga me nggunakan prinsip perbandingan luas sebagai pola pembuktian dalam penelitiannya, seperti dalam jurnal (Silvy, 2017; Mashadi, 2017; Pratiwi, 2018; Baharudin, 2018; Mulyadi, 2017).

Jika berbicara tentang Ceva maka kekonkurenan garis adalah hal yang harus ditunjukkan. Ide pembuktian kekonku-renan garis telah banyak dibahas sebelumnya seperti dalam (Mas hadi, 2015; Mashadi, 2015; Mashadi, 2016; Nurahmi, 2015). Pada tulisan ini teorema Ceva dikembangkan lagi, yaitu teorema Ceva pada segilima untuk berbagai kasus titik pada segilima konveks dan segilima non konveks. Pembuktian teorema Ceva pada segilima dengan menggunakan konsep perbandingan luas, yang mudah dipahami oleh siswa SMP dan SMA, sehingga dapat menjadi salah satu materi pengayaan bagi mereka.

METODE

Pada tulisan ini penulis membahas empat kasus, kasus 1 ke konkurenan lima buah garis di dalam segilima konveks, kasus 2 kekonkurenan lima buah garis di luar segilima konveks, kasus 3 kekon-kurenan lima buah garis di luar segilima nonkonveks dan kasus 4 kekonkurenan lima buah garis di dalam segilima nonkonveks. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

A. Kasus 1 menunjukkan kekonku-renan lima buah garis yang berada di dalam segilma konveks

1. Melukis segilima $A_1A_2A_3A_4A_5$ konveks dan nonkonveks sem barang.
2. Menentukan titik P sebagai titik potong yang berada di dalam segilima konveks dan segilama nonkonveks yang terbentuk dari garis A_1V_1 yang

berasal dari titik sudut A_1 yang memotong sisi A_3A_4 di titik V_1, selanjutnya garis A_2V_2 dari titik sudut A_2 yang memotong sisi A_4A_5 di titik V_2, kemudian garis A_3V_3 dari titik sudut A_3 yang memotong sisi A_5A_1 di titik V_3, garis A_4V_4 dari titik sudut A_4 yang memotong sisi A_1A_2 di titik V_4, dan garis A_5V_5 dari titik sudut A_5 yang memotong sisi A_2A_3 di titik V_5.
3. Selanjutnya, berdasarkan langkah ke-2 dan teorema dasar dari teorema ceva, dapat dibentuk pernyataan yaitu kelima buah garis berpotongan di satu titik yaitu titik P jika dan hanya jika $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$
4. Mengkontruksi garis A_1A_3 dan garis A_1A_4, kontruksi garis A_2A_5 dan garis A_2A_4, kontruksi garis A_3A_1 dan garis A_3A_5, sehingga membentuk 5 buah segitiga.
5. Langkah untuk pembuktian pernyatan dari kiri ke kanan yaitu partisi lima buah segitiga yang terbentuk dari langkah-4, selanjutnya berdasarkan teorema Ceva pada segitiga dianalisa lima persamaan dari masing-masing segitiga, dengan menggunakan perbandingan luas akan diperoleh pernyataan dari kiri ke kanan.
6. Jika langkah ke-5 terbukti maka selanjutnya langkah untuk membuktian pernyataan dari kanan ke kiri. Misalkan garis A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5 berpotongan di titik P, Misalkan pula garis $A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ ber potongan di titik P, selanjutnya dibuat garis A_1P yang diperpanjang sehingga memotong sisi A_3A_4 di titik V_1'. Kemudian buat persamaan teorema Ceva yang baru dari pemisalan titik V_1' terhadap segilima $A_1A_2A_3\ \ A_4A_5$. Buat analisa perbandingan persamaan teorema Ceva yang pertama dengan persamaan teorema Ceva yang baru, sehingga akan diperoleh pernyataan dari kanan ke kiri.

B. Kasus 2 menunjukkan kekonkurenan lima buah garis yang berada di luar segilma konveks

1. Melukis segilima $A_1A_2A_3A_4A_5$ konveks sembarang.
2. Menentukan titik P sebagai titik potong dari lima buah garis yang terbentuk dari garis A_1V_1 yang berasal dari titik sudut A_1 yang memotong sisi A_3A_4 di titik V_1, selanjutnya garis A_2V_2 dari titik sudut A_2 yang memotong per-panjangan sisi A_4A_5 di titik V_2, kemudian garis A_3V_3 dari titik sudut A_3 yang memotong perpanjangan sisi A_5A_1 di titik V_3, garis A_4V_4 dari titik sudut A_4 yang memotong perpanjangan sisi A_1A_2 di titik V_4, dan garis A_5V_5 dari titik sudut A_5 yang memotong perpanjangan sisi A_2A_3 di titik V_5.
3. Selanjutnya, berdasarkan langkah ke-2 dan teorema dasar dari teorema ceva, dapat dibentuk pernyataan yaitu kelima buah garis berpotongan di satu titik yaitu titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$$

Untuk langkah 4, 5 dan 6 pada kasus ini sama dengan langkah pada kasus 1.

C. Kasus 3 menunjukkan kekonkurenan lima buah garis yang berada di luar segilma non konveks:

1. Melukis segilima $A_1A_2A_3A_4A_5$ non konveks sembarang.
2. Menentukan titik P sebagai titik potong dari lima buah garis yang terbentuk dari garis A_1V_1 yang berasal dari titik sudut A_1 yang memotong sisi A_3A_4 di titik V_1, selanjutnya garis A_2V_2 dari titik sudut A_2 yang

memotong per-panjangan sisi A_4A_5 di titik V_2, kemudian garis A_3V_3 dari titik sudut A_3 yang memotong perpan-jangan sisi A_5A_1 di titik V_3, garis A_4V_4 dari titik sudut A_4 yang memotong perpanjangan sisi A_1A_2 di titik V_4, dan garis A_5V_5 dari titik sudut A_5 yang memotong perpanjangan sisi A_2A_3 di titik V_5.

3. Selanjutnya, berdasarkan langkah ke-2 dan teorema dasar dari teo-rema ceva, dapat dibentuk per-nyataan yaitu kelima buah garis berpotongan di satu titik yaitu titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1}=1$$

Untuk langkah 4, 5 dan 6 pada kasus ini sama dengan langkah pada kasus 1.

D. Kasus 4 menunjukkan kekonku-rean lima buah garis yang berada di dalam segilma nonkonveks

1. Melukis segilima $A_1A_2A_3A_4A_5$ non konveks sembarang.
2. Menentukan titik P sebagai titik potong dari lima buah garis yang terbentuk dari garis A_1V_1 yang berasal dari titik sudut A_1 yang memotong sisi A_3A_4 di titik V_1, selanjutnya garis A_2V_2 dari titik sudut A_2 yang memotong perpanjangan sisi A_4A_5di titik V_2, kemudian garis A_3V_3 dari titik sudut A_3 yang memotong sisi A_5A_1di titik V_3, garis A_4V_4 dari titik sudut A_4 yang memotong sisi A_1A_2 di titik V_4, dan garis A_5V_5 dari titik sudut A_5 yang memotong perpanjangan sisi A_2A_3 di titik V_5.
3. Selanjutnya, berdasarkan langkah ke-2 dan teorema dasar dari teorema ceva, dapat dibentuk pernyataan yaitu kelima buah garis berpotongan di satu titik yaitu titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1}=1$$

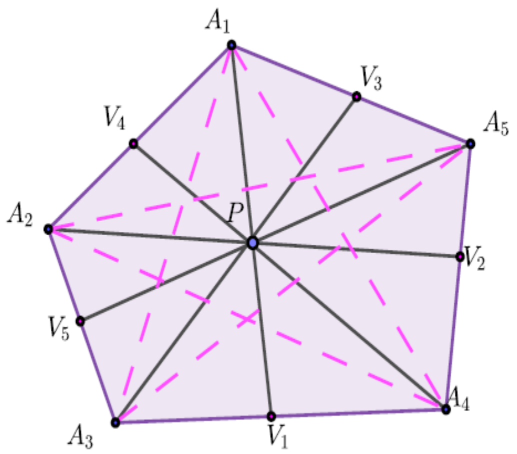
Untuk langkah 4, 5 dan 6 pada kasus ini sama dengan langkah pada kasus 1.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1 (Teorema Ceva pada segilima (kasus1)). Misalkan $A_1A_2A_3\ A_4A_5$ adalah segilima konveks dan jika V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 masing-masing adalah titik pada sisi $A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1, A_1A_2, A_2A_3$ pada segi-lima, maka garis A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5 berpotongan di titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1}=1 \qquad (1)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 2,



Gambar 2. Garis A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5Konkuren di Titik P.

(⇒)
Misalkan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4$, A_5V_5 berpotongan di titik P, maka akan ditunjukkan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1}=1.$
Dengan menggunakan kontruksi garis A_1A_3, garis A_1A_4, garis A_2A_5, garis A_2A_4, dan garis A_3A_5 diperoleh

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

$\Delta A_1A_3A_4$, perhatikan $\Delta A_1A_3V_1$ dan $\Delta A_1A_4V_1$ dengan menggunakan per bandingan luas segitiga maka diperoleh

$$\frac{A_3V_1}{V_1A_4} = \frac{L\Delta A_1A_3V_1}{L\Delta A_1A_4V_1} = \frac{L\Delta A_3PV_1}{L\Delta A_4PV_1}$$
$$= \frac{L\Delta A_1A_3V_1 - L\Delta A_3PV_1}{L\Delta A_1A_4V_1 - L\Delta A_4PV_1}$$

$$\frac{A_3V_1}{V_1A_4} = \frac{L\Delta A_3PA_1}{L\Delta A_4PA_1} \text{ .... } (2)$$

$\Delta A_2A_4A_5$, perhatikan $\Delta A_2A_4V_2$ dan $\Delta A_2A_5V_2$ dengan menggunakan per bandingan luas segitiga maka diperoleh

$$\frac{A_4V_2}{V_2A_5} = \frac{L\Delta A_2A_4V_2}{L\Delta A_2A_5V_2} = \frac{L\Delta A_4PV_2}{L\Delta A_5PV_2}$$
$$= \frac{L\Delta A_2A_4V_2 - L\Delta A_4PV_2}{L\Delta A_2A_5V_2 - L\Delta A_5PV_2}$$

$$\frac{A_4V_2}{V_2A_5} = \frac{L\Delta A_2PA_4}{L\Delta A_2PA_5} \text{ .... } (3)$$

Untuk $\Delta A_1A_3A_5$, $\Delta A_1A_2A_4$, $\Delta A_2A_3A_5$ dengan cara yang sama di peroleh

$$\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = \frac{L\Delta A_1PA_3}{L\Delta A_5PA_3} \text{ ....} (4)$$

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1PA_4}{L\Delta A_2PA_4} \text{ ....} (5)$$

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2PA_5}{L\Delta A_3PA_5} \text{ ....} (6)$$

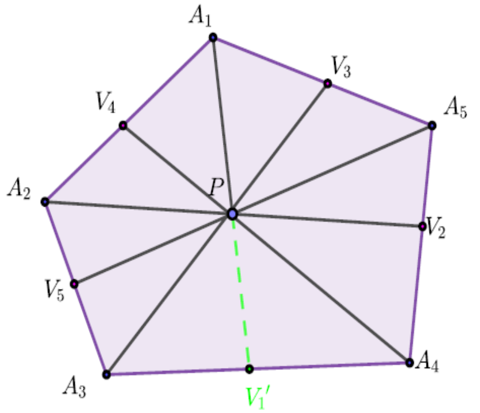
Dari persamaan (2),(3)(4),(5) dan (6) diperoleh

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$$

Ini bermakna persamaan (1) terpenuhi.

(⇐) untuk membuktikan sebaliknya, misalkan perbandingan hasil kali kelima garis bernilai 1, akan ditunjukkan bahwa kelima garis berpotongan di satu titik.

Bukti: Perhatikan Gambar 3,



Gambar 3. Ilustrasi Perpanjangan Garis A_1P

Misalkan pula garis A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5 berpotong an di titik P, Selanjutnya dibuat garis A_1P yang diperpanjang sehingga memotong sisi A_3A_4 di titik V_1'. Berdasarkan hipotesis maka berlaku

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1'}{V_1'A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1 \text{ ...... } (7)$$

Kemudian perhatikan kembali persamaan (1)

Bila persamaan (1) dan (7) dibanding kan maka berlaku

$$\frac{A_3V_1'}{V_1'A_4} = \frac{A_3V_1}{V_1A_4}$$

$$\frac{A_3V_1'}{V_1'A_4} + 1 = \frac{A_3V_1}{V_1A_4} + 1$$

$$\frac{A_3V_1' + V_1'A_4}{V_1'A_4} = \frac{A_3V_1 + V_1A_4}{V_1A_4}$$

$$\frac{A_3A_4}{V_1'A_4} = \frac{A_3A_4}{V_1A_4}$$

Persamaan di atas menyatakan $V_1' = V_1$ dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari titik sudut A_1 yang memotong garis A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5 tepat di titik P yaitu garis A_1V_1 maka

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

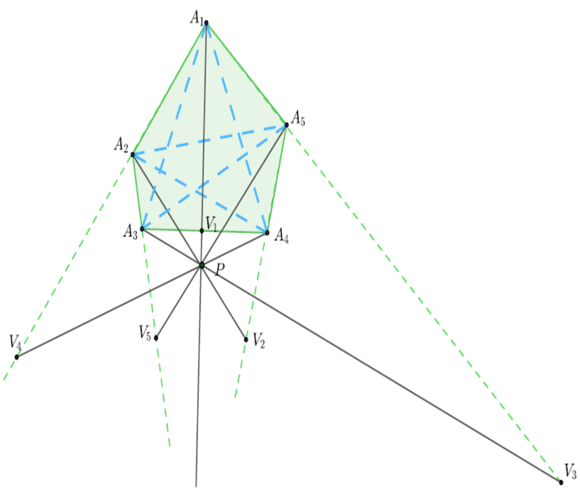
Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

kelima garis tersebut berpotongan di satu titik.

Teorema 2 (Teorema Ceva pada segi lima (kasus2)). Misalkan $A_1A_2A_3A_4A_5$ adalah segilima konveks dan jika V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 masing-masing adalah titik pada sisi A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 A_1A_2, A_2A_3 pada segilima, maka garis A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5 berpotongan di titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1 \text{ ....(8)}$$

Bukti: Perhatikan Gambar 4,



Gambar 4. Garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ Konkuren di Titik P

($\Rightarrow$)
Misalkan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ berpotongan di titik P, maka akan ditunjukkan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$.
Dengan menggunakan kontruksi garis A_1A_3, garis A_1A_4, garis A_2A_5, garis A_2A_4, dan garis A_3A_5 diperoleh

Perhatikan $\Delta A_1A_4V_4$ dan $\Delta A_2A_4V_4$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh,

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1A_4V_4}{L\Delta A_2A_4V_4} = \frac{L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2PV_4} = \frac{L\Delta A_1A_4V_4 - L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2A_4V_4 - L\Delta A_2PV_4}$$

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1PA_4}{L\Delta A_2PA_4} \text{ .... (9)}$$

Perhatikan $\Delta A_2A_5V_5$ dan $\Delta A_3A_5V_5$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh,

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2A_5V_5}{L\Delta A_3A_5V_5} = \frac{L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3PV_5} = \frac{L\Delta A_2A_5V_5 - L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3A_5V_5 - L\Delta A_3PV_5}$$

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2PA_5}{L\Delta A_3PA_5} \text{ ....(10)}$$

Perhatikan $\Delta A_1A_3A_4$ kemudian misal-kan h_1 tinggi $\Delta A_1A_3A_4$. Dengan menentukan luas segitiga diperoleh,

$$L\Delta A_1A_3A_4 = L\Delta A_1A_3V_1 + L\Delta A_1A_4V_1$$

Kemudian
$$L\Delta A_1A_3V_1 = \tfrac{1}{2}A_3V_1 \times h_1$$
Dan
$$L\Delta A_1A_4V_1 = \tfrac{1}{2}A_4V_1 \times h_1$$

Perhatikan ΔA_3A_4P kemudian misal-kan h_2 tinggi ΔA_3A_4P. Dengan menentukan luas segitiga diperoleh,
$$L\Delta A_3A_4P = L\Delta PA_3V_1 + L\Delta PA_4V_1$$

Kemudian
$$L\Delta PA_3V_1 = \frac{1}{2}A_3V_1 \times h_2$$
dan
$$L\Delta PA_4V_1 = \frac{1}{2}A_4V_1 \times h_2$$

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Selanjutnya perhatikan ΔA_1A_3P dan ΔA_1A_4P dengan menggunakan perbandingan luas diperoleh,

$$\frac{L\Delta A_1A_3P}{L\Delta A_1A_4P} = \frac{L\Delta P\,A_3V_1 + L\Delta A_1A_3V_1}{L\Delta P\,A_4V_1 + L\Delta A_1A_4V_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}A_3V_1 \times h_2 + \frac{1}{2}A_3V_1 \times h_1}{\frac{1}{2}A_4V_1 \times h_2 + \frac{1}{2}A_4V_1 \times h_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}A_3V_1(h_2+h_1)}{\frac{1}{2}A_4V_1(h_2+h_1)}$$

$$\frac{L\Delta A_1A_3P}{L\Delta A_1A_4P} = \frac{A_3V_1}{A_4V_1}$$

Atau

$$\frac{A_3V_1}{V_1A_4} = \frac{L\Delta A_1A_3P}{L\Delta A_1A_4P} \quad \text{.........................} (11)$$

Untuk $\Delta A_2A_4V_2$ dan $\Delta A_2A_5V_2$ serta $\Delta A_3A_5V_3$ dan $\Delta A_1A_3V_3$ dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{A_4V_2}{V_2A_5} = \frac{L\Delta A_2PA_4}{L\Delta A_2PA_5} \quad \text{....................}(12)$$

$$\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = \frac{L\Delta A_1PA_3}{L\Delta A_5PA_3} \quad \text{....................}(13)$$

Dari persamaan (9),(10)(11),(12) dan (13) diperoleh

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$$

Ini bermakna persamaan (8) terpenuhi.

(⇐)

Misalkan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_2}{V_2A_4}\frac{A_4V_1}{V_1A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$

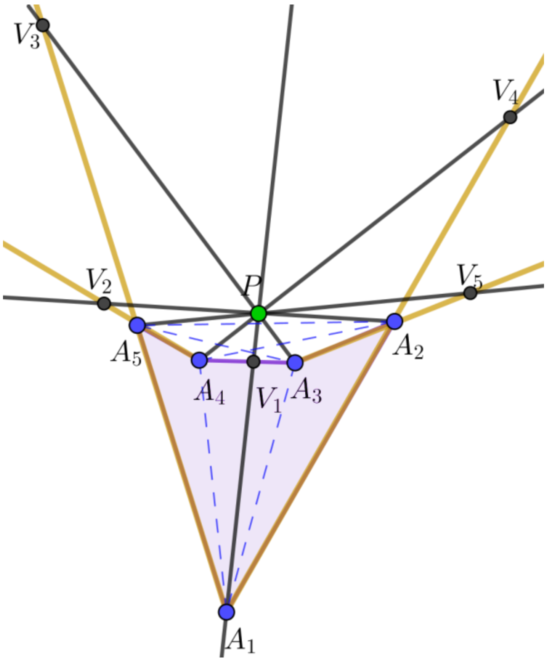
maka akan dibuktikan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ berpotong-an di satu titik yaitu titik P. Untuk membuktikan sebaliknya, menggunakan konsep dan cara yang sama pada pembuktian teorema 1 maka mudah untuk didapat bukti pada teorema 2.

Selanjutnya teorema Ceva pada segilima tidak hanya terjadi pada segilima konveks, tetapi bisa terjadi pada segilima nonkonveks yaitu untuk titik yang berada di dalam segilima. Segilima nonkonveks $A_1A_2A_3A_4A_5$ dapat terbentuk dari tiga buah segitiga yaitu $\Delta A_1A_4A_5$, $\Delta A_1A_3A_4$ dan $\Delta A_1A_2A_3$. Berikut ini dibahas teorema Ceva pada segilima nonkonveks.

Teorema 3 (Teorema Ceva pada segilima (kasus3). Misalkan $A_1A_2A_3\ A_4A_5$ adalah segilima nonkonveks dan jika V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 masing-masing adalah titik pada sisi $A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1\ , A_1A_2$dan A_2A_3 pada segilima, maka garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ ber-potongan di titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1 \text{ ....}(14)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 5



Gambar 5. Garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$Konkuren di Titik P.

(⇒)

Misalkan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ berpotongan di titik P, maka akan

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

ditunjukkan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1.$
Dengan menggunakan kontruksi ga ris A_1A_3, garis A_1A_4, garis A_2A_5, garis A_2A_4, dan garis A_3A_5 diperoleh

Perhatikan $\Delta A_1A_4V_4$ dan $\Delta A_2A_4V_4$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh,

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1A_4V_4}{L\Delta A_2A_4V_4} = \frac{L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2PV_4} = \frac{L\Delta A_1A_4V_4 - L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2A_4V_4 - L\Delta A_2PV_4}$$

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1PA_4}{L\Delta A_2PA_4} \text{.........................(15)}$$

Perhatikan $\Delta A_2A_5V_5$ dan $\Delta A_3A_5V_5$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh,

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2A_5V_5}{L\Delta A_3A_5V_5} = \frac{L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3PV_5} = \frac{L\Delta A_2A_5V_5 - L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3A_5V_5 - L\Delta A_3PV_5}$$

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2PA_5}{L\Delta A_3PA_5} \text{.......................... (16)}$$

Untuk $\Delta A_1A_3A_4$, $\Delta A_2A_4V_2$ dan $\Delta A_2\ A_5V_2$ serta $\Delta A_3A_5V_3$ dan $\Delta A_1A_3V_3$ dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{A_3V_1}{V_1A_4} = \frac{L\Delta A_1A_3P}{L\Delta A_1A_4P} \text{.....................(17)}$$

$$\frac{A_4V_2}{V_2A_5} = \frac{L\Delta A_2PA_4}{L\Delta A_2PA_5} \text{.....................(18)}$$

$$\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = \frac{L\Delta A_1PA_3}{L\Delta A_5PA_3} \text{.....................(19)}$$

Dari persamaan (15),(16)(17),(18) dan (19) diperoleh

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$$

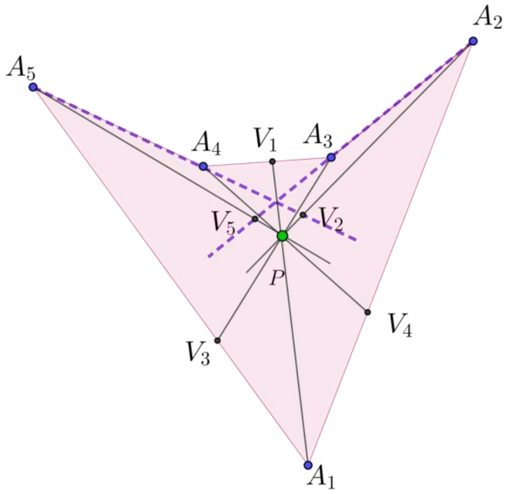
Ini bermakna persamaan (14) terpenuhi.

(⇐)
Misalkan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_2}{V_2A_4}\frac{A_4V_1}{V_1A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$ maka akan dibuktikan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ berpotongan di satu titik yaitu titik P. Untuk membuktikan sebaliknya, menggunakan konsep dan cara yang sama pada pembuktian teorema 1 maka mudah untuk didapat bukti pada teorema 3.

Teorema 4 (Teorema Ceva pada segilima (kasus4). Misalkan $A_1A_2A_3\ A_4A_5$ adalah segilima nonkonveks dan jika V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 masing-masing adalah titik pada sisi $A_3A_4, A_4A_5,$ A_5A_1, A_1A_2, A_2A_3 pada segilima, maka garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ ber potongan di titik P jika dan hanya jika

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1 \text{......} \quad (20)$$

Bukti: Perhatikan Gambar 6 berikut



Gambar 6. Garis A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3 A_4V_4, A_5V_5 Konkuren di Titik P.

(⇒)
Misalkan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4,$ A_5V_5 berpotongan di titik P, maka akan dibuktikan $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1.$
Dengan menggunakan kontruksi garis

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 47 – 56
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

A_1A_3, garis A_1A_4, garis A_2A_5, garis A_2A_4, dan garis A_3A_5 di peroleh

Perhatikan $\Delta A_1A_4V_4$ dan $\Delta A_2A_4V_4$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1A_4V_4}{L\Delta A_2A_4V_4} = \frac{L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2QV_4}$$
$$= \frac{L\Delta A_1A_4V_4 - L\Delta A_1PV_4}{L\Delta A_2A_4V_4 - L\Delta A_2PV_4}$$
$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2} = \frac{L\Delta A_1PA_4}{L\Delta A_2PA_4} \text{ .... (21)}$$

Perhatikan $\Delta A_2A_5V_5$ dan $\Delta A_3A_5V_5$ dengan menggunakan perbandingan luas segitiga maka diperoleh

$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2A_5V_5}{L\Delta A_3A_5V_5} = \frac{L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3PV_5}$$
$$= \frac{L\Delta A_2A_5V_5 + L\Delta A_2PV_5}{L\Delta A_3A_5V_5 + L\Delta A_3PV_5}$$
$$\frac{A_2V_5}{V_5A_3} = \frac{L\Delta A_2PA_5}{L\Delta A_3PA_5} \text{ .... (22)}$$

Untuk $\Delta A_1A_3A_5$, $\Delta A_1A_2A_4$ dan ΔA_2, A_3A_5 dengan cara yang sama di peroleh

$$\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = \frac{L\Delta A_1PA_3}{L\Delta A_5PA_3} \text{ .... (23)}$$
$$\frac{A_3V_1}{V_1A_4} = \frac{L\Delta A_3PA_1}{L\Delta A_4PA_1} \text{ .... (24)}$$
$$\frac{A_4V_2}{V_2A_5} = \frac{L\Delta A_2PA_4}{L\Delta A_2PA_5} \text{ .... (25)}$$

Dari persamaan (21),(22),(23),(24) dan (25) diperoleh

$$\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_1}{V_1A_4}\frac{A_4V_2}{V_2A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$$

Ini bermakna persamaan (20) terpenuhi.

($\Leftarrow$) Jika $\frac{A_1V_4}{V_4A_2}\frac{A_2V_5}{V_5A_3}\frac{A_3V_2}{V_2A_4}\frac{A_4V_1}{V_1A_5}\frac{A_5V_3}{V_3A_1} = 1$ maka akan dibuktikan garis $A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3, A_4V_4, A_5V_5$ berpotongan di sa-tu titik yaitu titik P.

Untuk membuktikan sebaliknya, me-nggunakan konsep dan cara yang sama pada pembuktian teorema 1 maka mudah untuk didapat bukti pada teorema 4

SIMPULAN

Tulisan ini dapat disimpulkan bahwa pengembangan teorema Ceva pada segilima dengan pembuktian me-nggunakan prinsip perbandingan luas menghasilkan lima buah garis ber-potongan di satu titik dalam berbagai kasus.

DAFTAR RUJUKAN

Baharudi, A. Mashadi, Habibi Saleh & Hasriati. 2018. Modifikasi Teorema Van Aubel pada Segitiga. *Jurnal Mathematic Paedagogic*. 7: 111-118.

Belyaev, O. A. 2007. *Fundamental of Geometry*. Moscow State University. 2007.

Benitez, J. 2007. A unified proof of Ceva and Menelaus theorems using projective Geometry. *Jou rnal for Geometry and Gra fichs*. 11. 39-44.

Grunbaum, B. dan G. C. Shephard. 1995. Ceva, Menelaus, and the area principle, *Mathematics Magazine*. 68. 254-260.

Karlia, S., Mashadi, M. D. H. Gamal dan Hariati. 2017. Multiple kos nita menggunakan circum-cen ter melalui excenter. *Matem atics Paedagogic*. 1 .135-14.

Landy, S. 1988. A generalization of Ceva’s theorem to Higher Dimensions, The American Ma thematical Monthly. *Mathema tical Association of Amerika*. 95. 936-939.

Mashadi. 2015. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

Mashadi. 2015. *Geometri Lanjut*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

Mashadi. 2016. *Pembelajaran Matematika*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru.

Mashadi. 2017. Citra Valentika, Sri Gemawati dan Hasriati, The developmen of Napoleons theo rem on the quadrilateral in case of outside direction, *Pure and Applied Mathematics Jou rnal*. 6 . 108-113.

Nurahmi, Mashadi dan Hasriati. 2014. Pengembangan teorema Ceva dan teorema Menelaus pada segiempat, *Prosiding Seminar Nasional dan Kongres IndoMS Wilayah Su-matera Bagian Te ngah*. FMIPA Universitas Riau. Pekanbaru.

Pratiwi, D., Mashadi dan Sri Gemawati. 2018. Pengembangan titik Mi quel dalam pada sebarang segi empat. *Euclid*. 5. 1-7.

Mulyadi, M. Mashadi, Habibi Saleh, & Hasriati. 2017. Pengembangan Teorema Van Aubel pada Segienam. *Jurnal Mathematic Paedagogic*. 1: 119-128.