Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 19 – 24
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGEMBANGAN TEOREMA SAWAYAMA-THEBAULT MENGGUNAKAN *EXCENTER*

Surlina[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1]Pengajaran Matematika PPs, Universitas Riau
[2,3]Universitas Riau
e-mail: surlinamathedu@gmail.com

Abstract

A triangle have special lines, such as angle bisectors and perpendicular bisector.These special lines are concurrent with their corresponding concurrent points, and called *incenter*, *excenter* and *circumcenter*. This paper discusses how to prove the collinear point of Sawayama-Thebault's circle using excenter. Then, it is proved the three points collinear using simple ways, like similarity triangles and Thales theorem.

Keywords: Sawayama-Thebault's theorem, excenter, collinear

Abstrak

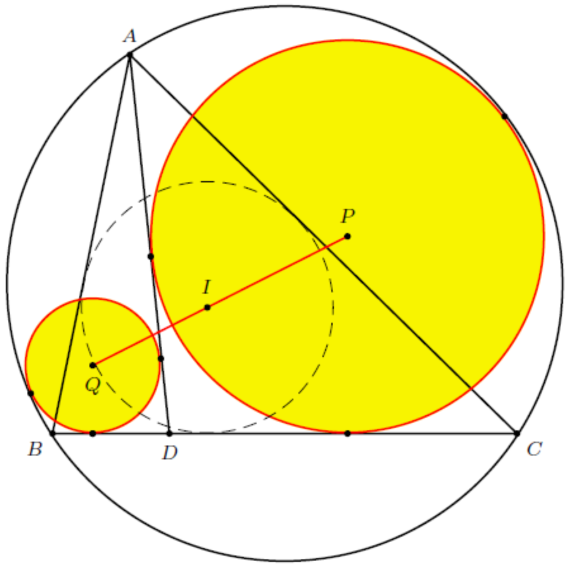
Segitiga memiliki beberapa garis-garis istimewa, diantaranya garis bagi, dan garis sumbu. Garis-garis istimewa ini kongkuren dan masing-masing titik kongkuren disebut *incenter, excenter* dan *circumcenter* . Pada makalah ini dibahas kolinearitas titik pusat lingkaran Sawayama-Thebault menggunakan *excenter*. Pembuktian kekolinearitas menggunakan konsep geometri sederhana, yakni kesebangunan segitiga dan teorema Thales.

Kata kunci: Teorema Sawayama-Thebault, excenter, kolinearitas

Segitiga memiliki beberapa garis-garis istimewa seperti garis bagi, garis berat, garis tinggi dan garis sumbu. Titik potong ketiga garis bagi segitiga berpotongan di suatu titik disebut *incenter*. Titik potong ketiga garis sumbu segitiga juga berpotongan pada suatu titik yang dinamakan *circumcenter*. *Incenter* merupakan titik pusat lingkaran dalam dan *circumcenter* merupakan titik pusat lingkaran luar (Mashadi, 2015). Salah satu Teorema yang berkaitan dengan *circumcenter* adalah teorema Sawayama-Thebault. Teorema Sawayama-Thebault dikemukakan oleh matematikawan Perancis yang bernama Victor Thebault tahun 1938. Kemudian teorema Sawayama-Thebault dibuktikan oleh Ayme (2003). Teorema Sawayama-Thebault menyatakan tentang kolinearitas tiga buah titik. Titik-titik ini dikonstruksi pada suatu ΔABC. Titik D terletak pada sisi BC. Jika P titik pusat lingkaran yang menyinggung sisi AD, DC dan lingkaran luar ΔABC. Kemudian Q titik pusat lingkaran yang menyinggung sisi AD, DB dan lingkaran luar ΔABC, sehingga titik P, I dan Q segaris.

Pada sebarang ΔABC dapat dibentuk lingkaran singgung luar segitiga, dan titik pusatnya disebut excenter. Mashadi (2015)

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 19 – 24
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



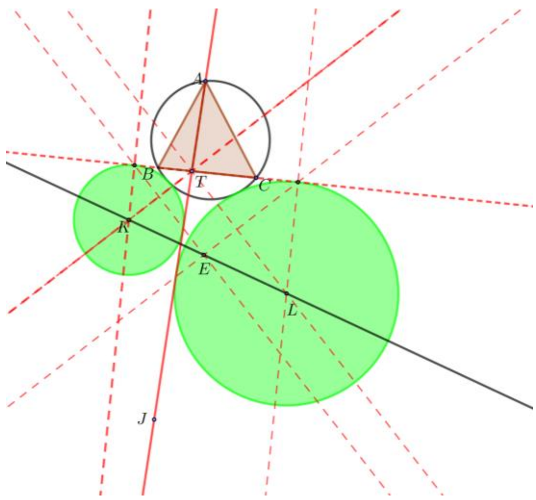
Gambar 1. Ilustrasi Teorema Sawayama-Thebault

disebutkan bahwa lingkaran singgung pada suatu ΔABC adalah lingkaran yang menyinggung sebuah sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya. Pada sebuah ΔABC terdapat tiga buah lingkaran singgung, yaitu lingkaran singgung yang menyinggung sisi BC, lingkaran singgung yang menyinggung sisi AC dan lingkaran singgung yang menyinggung sisi AB. Pada makalah ini dibahas pembuktian teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter* ΔABC.

METODE

Pada sebarang ΔABC, dapat dikonstruksi teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter* dengan langkah pengkonstruksian berikut.

1. Lukis sebarang ΔABC. Bentuk titik O, *circumcenter* ΔABC, kemudian buat lingkaran luar ΔABC
2. Buat titik T yang terletak pada sisi BC. Perpanjang garis AT dan BC, kemudian konstruksi *excenter* ΔABC yang menyinggung sisi BC.
3. Konstruksi lingkaran K yang menyinggung perpanjangan sisi BC, perpanjangan AT dan lingkaran luar ΔABC. Caranya diawali dengan membuat garis bagi $\angle BTJ$. Hubungkan *excenter* E tegak lurus dengan garis bagi sehingga memotong perpanjangan BC. Tarik garis tegak lurus perpanjangan BC dan memotong garis bagi, misalkan di K. Kemudian dibuat lingkaran dengan pusat K yang menying-gung perpanjangan sisi BC, perpanjangan AT dan lingkaran luar ΔABC.
4. Kontruksi lingkaran dengan pusat L yang menyinggung perpan-jangan sisi AT, perpanjangan BC dan lingkaran luar ΔABC. Caranya diawali dengan membuat garis bagi $\angle CTJ$. Hubungkan *excenter* E tegak lurus dengan garis bagi sehingga memotong perpanjangan BC. Tarik garis tegak lurus perpanjangan BC dan memotong garis bagi, misalkan di L. Titik L disebut titik pusat lingkaran L. Kemudian dibuat lingkaran dengan pusat L yang menyinggung perpanjangan sisi BC, perpanjangan AT dan lingkaran luar ΔABC. Akan dibuktikan titik K, E, dan L segaris.



Gambar 2. Akan dibuktikan titik K, E, dan L segaris

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 19 – 24
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

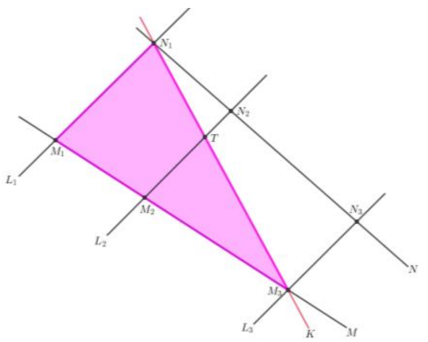
PEMBAHASAN

Untuk membuktikan teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter* ΔABC akan digunakan teorema Thales.

Teorema Thales dikemukan oleh Thales (624-550 SM) matematikawan Yunani seperti dalam [3]. Teorema Thales digunakan dalam geometri yang sering kita jumpai pada materi kesebangunan dan lingkaran.

Teorema 1. (Teorema Thales) Misalkan L_1, L_2, dan L_3 adalah tiga buah garis pada satu bidang.Garis M dan N adalah garis yang memotong garis L_i di M_i dan N_i dengan i = 1,2,3.

i. Jika garis L_1, L_2, dan L_3 sejajar maka berlaku $M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3$.
ii. Sebaliknya jika L_1 dan L_2 sejajar dan $M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3$ maka L_3 sejajar dengan L_1 dan L_2.



Gambar 3. Ilustrasi teorema Thales

Bukti.

(i) Pada Gambar 1, diberikan tiga buah garis sejajar. Misalkan K adalah garis yang melalui M_3N_1. Garis K tidak sejajar dengan L_1. Oleh sebab itu, garis K tidak sejajar dengan L_2. Sehingga garis K berpotongan dengan L_2, misalkan di titik T. Kemudian terbentuk ΔM_3M_2T dan $\Delta M_3M_1N_1$. Oleh karena $L_1 // L_2$, berdasarkan konsep kesebangunan (sd-sd-sd) diperoleh $\Delta M_3M_2T \sim \Delta M_3M_1N_1$. Yang mengakibatkan

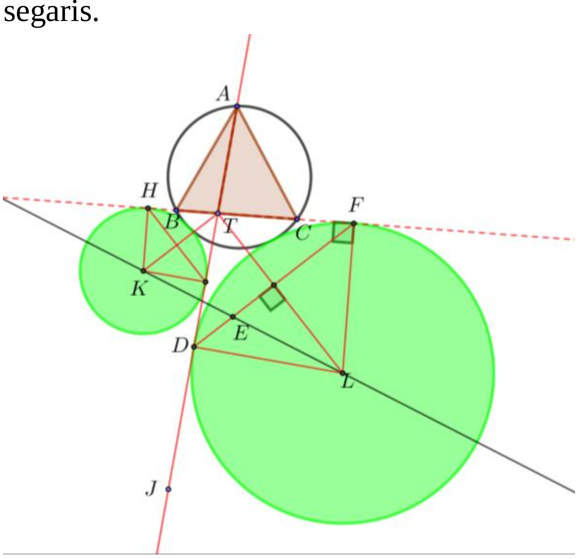
$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{N_1K}{KM_3} = \frac{N_1N_2}{N_2N_3}$$

Terbukti bahwa jika garis L_1, L_2, dan L_3 sejajar maka berlaku $M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3$. Ini berarti $M1;M2$ dan $M3$ segaris serta $N1;N2$ dan $N3$ segaris.

(ii) Diketahui $L1 // L2$ dan perbandingan sisi $M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3$. Berdasarkan (i), maka garis L_3 juga sejajar dengan L_1 dan L_2. ■

Pengembangan teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter*, yang berlaku pada segitiga sebarang. Pengembangan teorema ini menggunakan perpanjangan sisi segitiga dan perpanjangan garis yang melalui sisi segitiga serta lingkaran luar segitiga.

Teorema 2. (Teorema Sawayama-Thebault Menggunakan *Excenter*) Diberikan sebarang ΔABC, dengan titik T terletak pada sisi BC. Titik E adalah *excenter* ΔABC. Jika K titik pusat lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi AT, perpanjangan sisi BC dan lingkaran luar ΔABC. Kemudian L titik pusat lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi AT, perpanjangan BC dan lingkaran luar ΔABC, maka titik K, E dan L segaris.

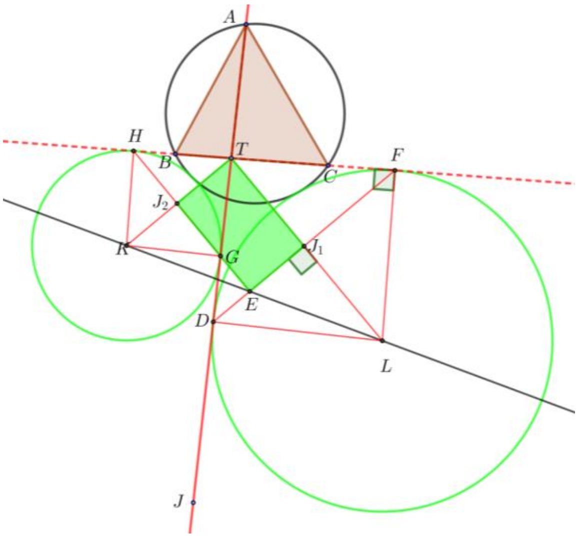


Gambar 4. *TDLF* adalah layang-layang garis singgung

Bukti.
Akan ditunjukkan $K;E$, dan L segaris menggunakan kebalikan teorema Thales. Pada Gambar 4, titik D dan F adalah titik singgung lingkaran L dengan perpanjangan garis AT dan perpanjangan garis BC. Titik G dan H adalah titik singgung lingkaran K dari perpanjangan sisi AT dan perpanjangan BC. Berdasarkan teorema garis singgung lingkaran, diperoleh:

$$TD = TF,$$
$$LD = LF.$$

Sehingga segiempat $TDLF$ layang-layang garis singgung. Ini mengakibatkan diagonal saling tegak lurus, $TL \perp DF$.
Demikian juga pada segi empat $GTKH$, diperoleh $GH \perp KT$.



Gambar 5. J_2TJ_1E adalah segi empat

Pada Gambar 5, misalkan $DF \cap \text{TL} = \text{J}_1$. Misalkan $GH \cap \text{KT} = \text{J}_2$. Diperoleh J_2TJ_1E adalah segi empat. Sehingga

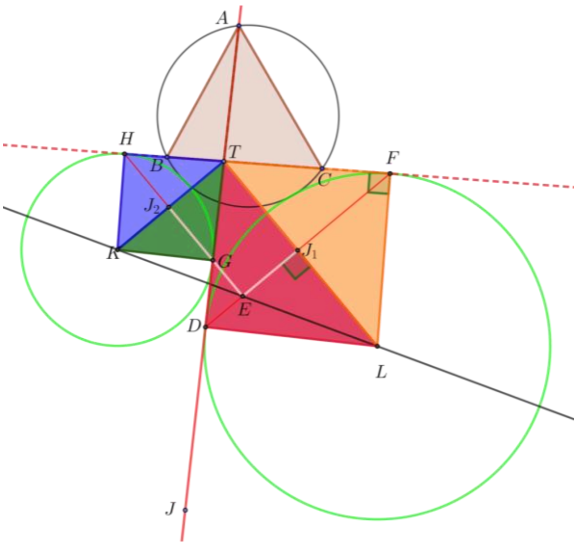
$$J_2T = J_1E. \qquad (1)$$

Pandang ΔGKT dan ΔDTL pada Gambar 5.

$$\angle GTK + \angle DTL = 90^0,$$
$$\angle GTK + \angle GKT = 90^0,$$
$$\angle DTL + \angle TLD = 90^0.$$

Sehingga diperoleh,

$$\angle GTK = \angle TLD,$$
$$\angle GKL = \angle DTL,$$
$$\angle KGT = \angle LTD.$$



Gambar 6: $\Delta GKT \sim \Delta DTL$

Karena memenuhi syarat kesebangunan (sd-sd-sd) maka $\Delta GKT \sim \Delta DTL$.
Titik J_1 adalah proyeksi sudut D ke garis TL pada ΔTDL. Titik J_2 adalah proyeksi sudut T ke garis GE pada ΔGKT.

Dari $\Delta GKT \sim \Delta DTL$ dan proyeksi J_1 dan J_2 diperoleh

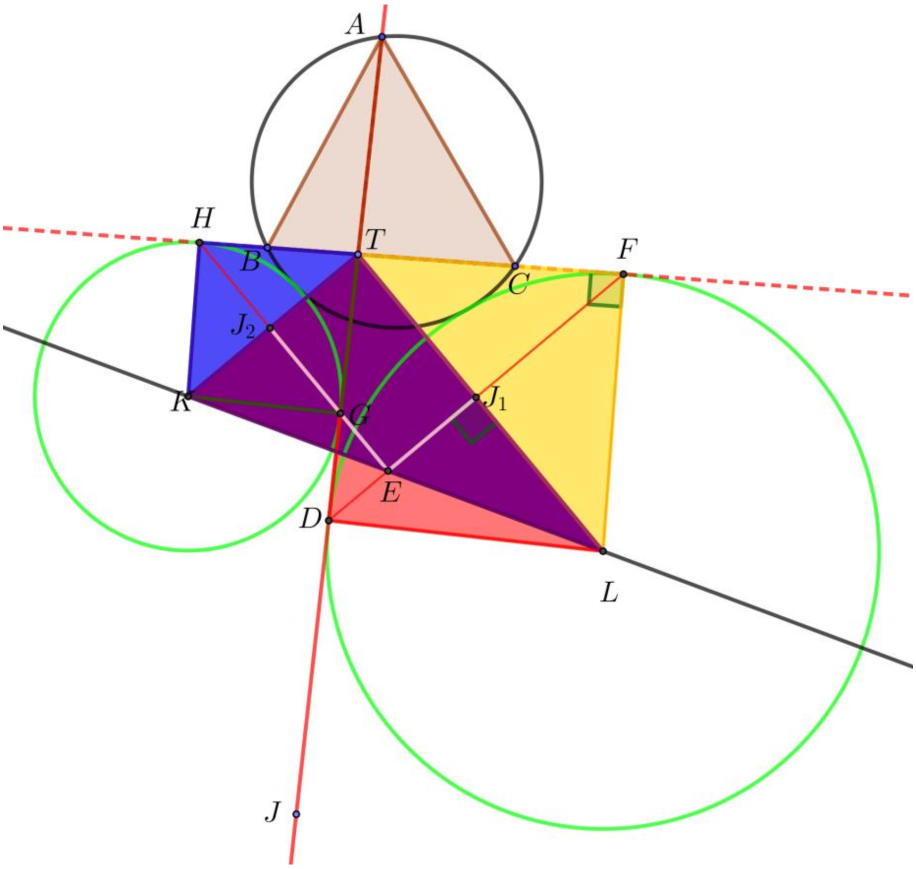
$$\frac{LT}{J_1T} = \frac{KT}{J_2T} \qquad (2)$$

Substitusi persamaan (1) ke persamaan (2) sehingga didapat

$$\frac{LT}{J_1T} = \frac{KT}{J_1E} \qquad (3)$$

Oleh karena $LT // J_1T$, maka persamaan (3) memenuhi kebalikan teorema Thales. Oleh karena itu titik K, E, dan L segaris. ■

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 19 – 24
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 7. Titik K, E, dan L segaris

SIMPULAN

Teorema Sawayama-Thebault berlaku pada segitiga sebarang. Pengembangan teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter* dapat diberlakukan pada sebarang segitiga. Simpulan yang dapat diperoleh adalah bahwa pengembangan teorema Sawayama-Thebault menggunakan *excenter*, yakni jika K dan L titik pusat lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi AT, perpanjangan sisi BC dan menyinggung lingkaran luar ΔABC. Kemudian titik E adalah *excenter* ΔABC, maka titik K, E dan L kolinear.

DAFTAR RUJUKAN

Ayme, J.L. 2003. *Sawayama and Thebault's theorem*, Forum Geometricorum, 3: 225 – 229.

Karlina, S., Mashadi, M., Gamal, M. G. M., & Hasriati, H. 2017. Multiple Kosnita Menggunakan Circumcenter Melalui Excenter. *Jurnal Mathematics Paedagogic*. *1*(2), 136-145.

Vol III. No. 1, September 2018, hlm. 19 – 24
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Mashadi. 2015. *Geometri Lanjut*. Pekanbaru: UR Press

Pujiati, P., Mashadi, M., Gamal, M. G. M., & Hasriati, H. (2017). Pengajaran Multiple Kosnita Menggunakan Icenter Melalui Excenter Bagi Siswa Sekolah Menengah. *Jurnal Mathematics Paedagogic*. *1*(2), 103-110.

Roe, J. 1993. *Elementary Geometry*, London: Oxford University Press