Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

MULTIPLE KOSNITA MENGGUNAKAN *CIRCUMCENTER* MELALUI *EXCENTER*

Sylvi Karlia[1], Mashadi[2], M. D. H. Gamal[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: syl.karlia@ymail.com

Abstract

Kosnita's Theorem is constructed with the circumcenter of the triangle. The lines joining the vertices A, B, and C of given triangle ABC with the circumcenters of the triangles BCO, CAO, and ABO (O is the circumcenter of ΔABC, respectively, are congcurrent. In this paper, it can be constructed Kosnita's point using the excenters of the triangle, following modification of the circumcenter or orthocenter in several case. Then, if this point linked to excenter, the lines congcurrent in one point. An interesting case for Kosnita' Theorem named Multiple Kosnita. In the process of proving this congcurrent is only use the concept of congruency and other concepts in trigonometry. So, it's very simple and easily for high school students to understood this problems.

Keywords: Kosnita' Theorem, circumcenter, excenter

Abstrak

Pengkonstruksian Teorema Kosnita secara umum berdasarkan circumcenter, yakni menunjukkan kekongkurensi tiga garis yang dihubungkan dari titik sudut A, B, C masing-masing ke circumcenter ΔBCO, ΔACO, dan ΔABO (O circumcenter ΔABC). Pada makalah ini akan dikonstruksi titik Kosnita dengan menggunakan ketiga excenter (titik pusat lingkaran singgung luar) segitiga, berdasarkan circumcenter atau orthocenter dalam berbagai kasus. Kemudian akan ditunjukkan konkurensi dari perpotongan ketiga garis yang melalui excenter dan masing-masing titik Kosnita. Hasilnya terdapat 3 (tiga) konstruksi Multiple Kosnita yang kongkuren, yaitu circumcenter-circumcenter, orthocenter-circumcenter, dan orthocenter-centroid. Proses pembuktiannya akan menggunakan konsep geometri sederhana, yaitu konsep kekongruenan segitiga sehingga mudah dipahami oleh siswa SMP dan SMA.

Kata kunci: Teorema *Kosnita, circumcenter, excenter*

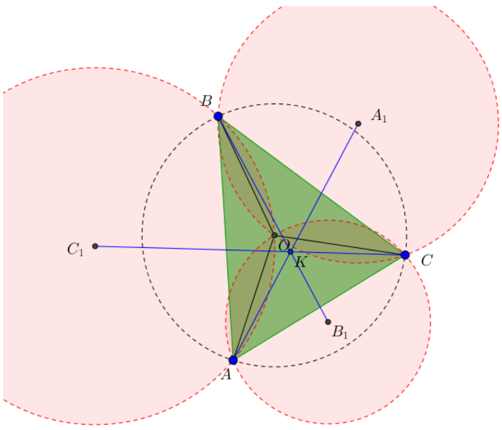
Segitiga adalah bangun datar yang dibatasi oleh tiga buah sisi dan mempunyai tiga buah sudut. Pada sebarang segitiga terdapat bermacam-macam garis istimewa, seperti garis bagi sudut, garis berat dan garis tinggi. Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubung-kan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus. Titik potong ketiga garis sumbu dalam sebuah segitiga inilah yang disebut dengan *circumcenter*, yang merupakan titik pusat lingkaran luar dari segitiga

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

seperti yang dikemukakan dalam (Mashadi, 2015) dan (Nurahmi, 2015).

Di bidang geometri salah satu teorema yang membahas tentang segitiga dan *circumcenter* adalah Teorema Kosnita yang dibahas dalam (Grinberg, 2003; Patrascu, 2010; Villiers, 1995). Teorema tersebut awalnya ditemukan oleh Cezar Cosnita pada tahun 1941. Selain itu (Patrascu, 2010) membahas kembali teorema pada tahun 2010 untuk mengenang 100 tahun kelahiran Cosnita.

Teorema Kosnita berlaku pada sebuah segitiga sebarang. Misalkan dari sebuah ΔABC dibuat *circumcenter*-nya. Kemudian ditarik dari masing-masing titik sudut $A, B,$ dan C ke *circumcenter* O, sehingga terbentuk ΔBCO, ΔACO, dan ΔABO. Dari ketiga segitiga ini dibentuk lagi masing-masing *circumcenter*-nya, yakni titik A_1, B_1, dan C_1. Kemudian jika dihubungkan secara berturut-turut maka AA_1, BB_1, dan CC_1 kongkuren. Titik potong ketiga garis AA_1, BB_1, dan CC_1 ini disebut dengan titik Kosnita. Sebagaimana yang diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Teorema Kosnita pada segitiga

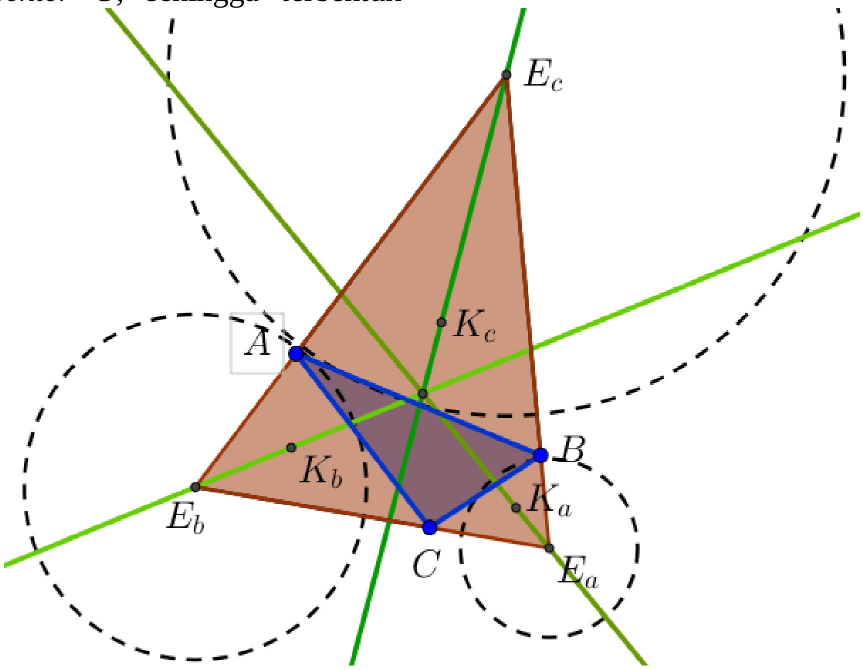
Adapun bukti dari teorema Kosnita tersebut dibuat oleh matematikawan dunia, salah satunya adalah Villiers dengan menggunakan generalisasi Fermat-Torricelli yang ditulis dalam (Villiers, 1995; Villiers, 2009). Villiers juga mengembangkan teorema Kosnita ini dengan menggunakan *incenter* segitiga yang diberi judul tulisannya dengan "A Dual to Kosnita's Theorem" (Villiers, 1996). Sedangkan titik Kosnita dinamakan oleh Rigby dalam tulisannya (Rigby, 1997).

Beberapa teori mengenai kekongkurenan segitiga dan pembuktiannya telah banyak dibahas diantaranya oleh (Mashadi, 2015; Mashadi, 2015; Mashadi, 2016; Nurahmi, 2015). Pada sebarang ΔABC dapat dibentuk lingkaran singgung luar segitiga, dan titik pusatnya disebut *excenter*. Dalam (Mashadi, 2015) disebutkan bahwa lingkaran singgung pada suatu ΔABC adalah lingkaran yang menyinggung sebuah sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya. Pada sebuah ΔABC terdapat tiga buah lingkaran singgung, yaitu lingkaran singgung yang menyinggung sisi BC, lingkaran singgung yang menyinggung sisi AC dan lingkaran singgung yang menyinggung sisi AB.

Pada makalah ini teorema Kosnita dikembangkan lagi, yaitu dari ketiga *excenter* segitiga dihubungkan ke titik sudut lainnya sehingga membentuk segitiga *excentral*. Misalkan segitiga yang terbentuk adalah ΔE_aBC, ΔE_bAC, ΔE_cAB. Kemudian dikonstruksi titik Kosnita menggunakan modifikasi *circumcenter-circumcenter*. Cara mengkonstruksinya adalah diawali dengan membuat *circumcenter* segitiga E_aBC, E_bAC, E_cAB, sehingga diperoleh titik I, H,

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

dan G. Kemudian ditarik dari masing-masing titik sudut E_a, B, dan C ke *circumcenter* G, sehingga terbentuk ΔE_aBG, ΔE_aCG, dan ΔBCG. Dari ketiga segitiga ini dibentuk lagi



Gambar 2. Multiple Kosnita menggunakan *circumcenter* melalui *excenter*

Jika berbicara tentang Kosnita, maka kekongkurenan ketiga garis adalah hal yang harus ditunjukkan. Ide pembuktian kekongkurenan ketiga garis telah banyak dibahas sebelumnya seperti dalam oleh (Mashadi, 2015; Mashadi, 2015; Mashadi, 2016; Nurahmi, 2015).

Dalam (Mashadi, 2015; Mashadi, 2015; Mashadi, 2016; Nurahmi, 2015) dinyatakan bahwa teorema Ceva terdiri dari tiga kasus yaitu kasus 1 menjelaskan tiga buah garis yang berpotongan di satu titik yang berada di dalam segitiga. Jika D, E dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA dan AB pada ΔABC. Maka garis AD, BE dan CF adalah kongkuren (bertemu di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Teorema Menelaus dalam (Mashadi, 2016) dan (Nurahmi, 2015) dikatakan bahwa jika D, E dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA dan AB pada ΔABC. Maka garis AD, BE dan CF adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

Teorema Ceva dan teorema Menelaus merupakan teorema yang digunakan untuk menunjukkan eksistensi kokolinearitas dan kekongkurenan dari beberapa buah garis. Pada proses pembuktiannya menggunakan konsep geometri sederhana yaitu

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

konsep kesebangunan, kekongruenan, luas segitiga, dan *phytagoras* sehingga mudah dipahami oleh siswa SMP dan SMA.

METODE

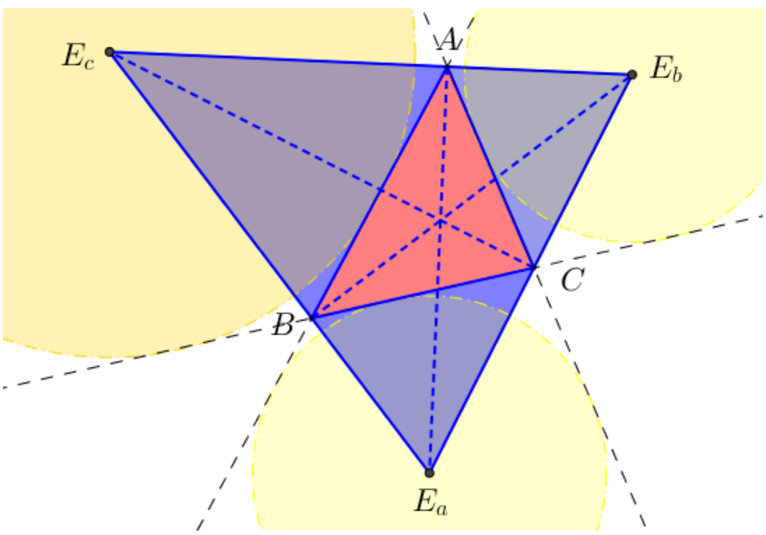
Pada penelitian ini peneliti membahas Multiple Kosnita yang berkaitan dengan *circumcenter* pada segitiga dan menggunakan *excenter*. Adapun langkah-langkah pengkonstruksiannya sebagai berikut:

1. Diberikan sebarang ΔABC, dibuat *excenter* E_a, E_b, dan E_c. Kemudian hubungkan ketiga *excenter* sehingga terbentuk ΔACE_b, ΔBCE_a, dan ΔABE_c.

2. Kemudian dikonstruksi titik *Kosnita* menggunakan modifikasi *circumcenter-circumcenter*. Diawali dengan membuat *circumcenter* segitiga E_aBC, E_bAC, E_cAB, sehingga diperoleh titik *I*, *H*, dan *G*. Kemudian ditarik dari masing-masing titik sudut E_a, *B*, dan *C* ke *circumcenter I*, sehingga terbentuk ΔE_aBI, ΔE_aCI, dan ΔBCI. Dari ketiga segitiga ini dibentuk lagi masing-masing *circumcenter*-nya, yakni titik *O*, *P*, dan *L*. Kemudian jika dihubungkan secara berturut-turut maka E_aL, *BP*, dan *CO* berpotongan di titik K_a. (Gambar 4)
3. Dengan cara yang sama, dikonstruksi juga pada ΔE_bAC, ΔE_cAB sehingga diperoleh titik K_b dan K_c. (Gambar 5)
4. Kemudian ditarik garis dari titik E_a ke K_a, titik E_b ke K_b, titik E_c ke K_c. Akan ditunjukkan garis E_aK_a, E_bK_b, dan E_cK_c kongkuren di titik *S*, yang merupakan *circumcenter* ΔABC. (Gambar 6)

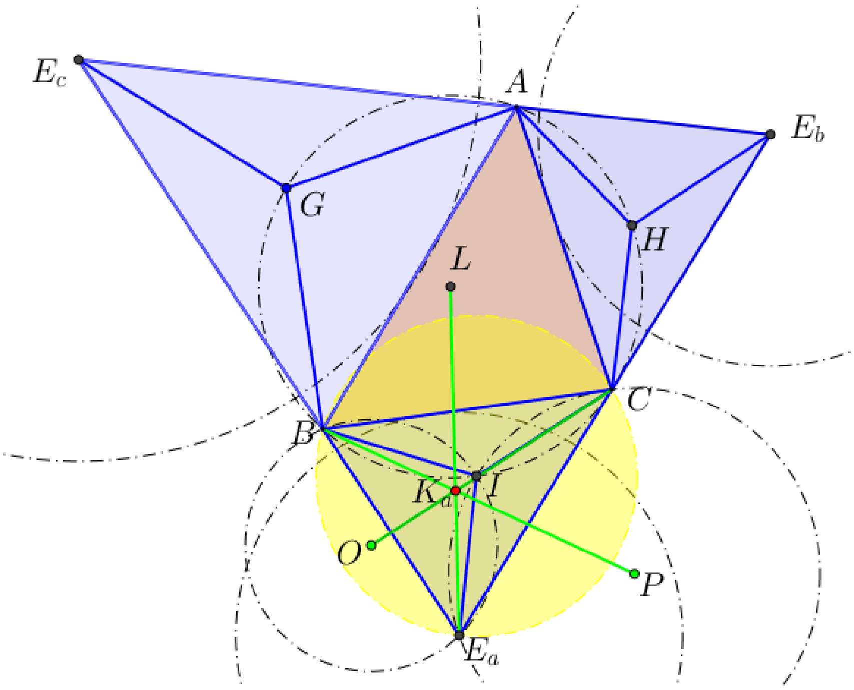
Sebelumnya, akan ditunjukkan *circumcenter* dari ΔABG, ΔAHC, dan ΔBCI adalah sama. Kemudian jika *circumcenter* dari ΔABG, ΔAHC, dan ΔBCI adalah sama, maka akan ditunjukkan *circumcenter* dari ΔABC juga sama.

Dari langkah-langkah di atas, pembuktian kekongkurenan di satu titik pada Multiple Kosnita ini akan digunakan konsep kekongruenan dan kesebangunan pada segitiga dan

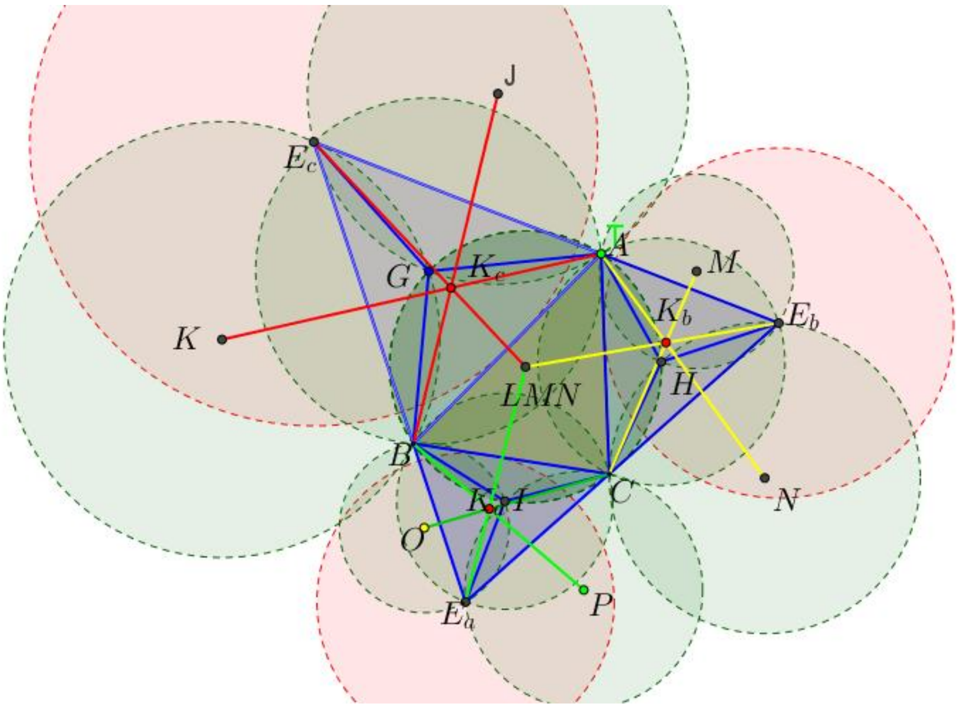


Gambar 3. *Excenter* ΔABC

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

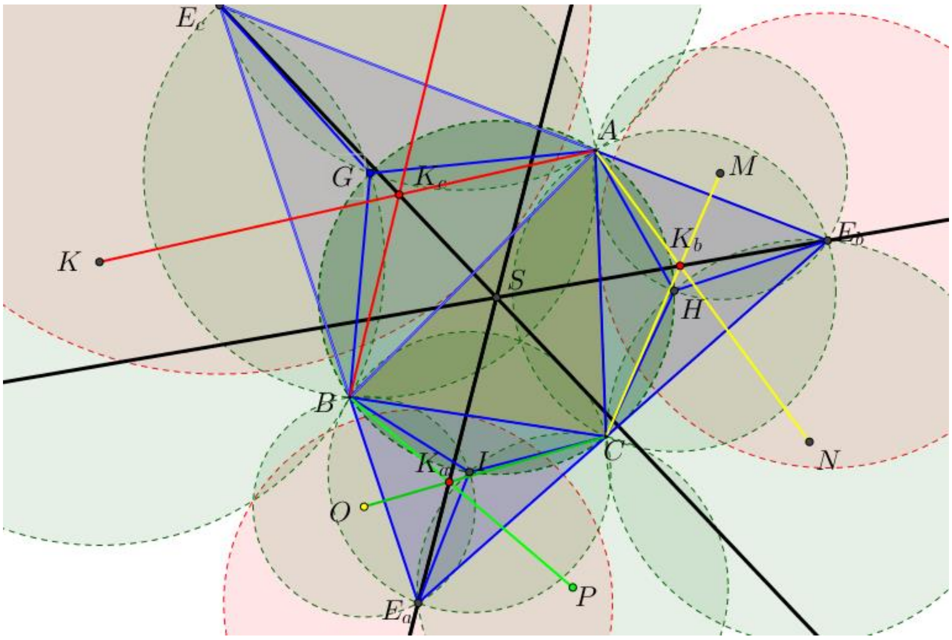


Gambar 4. *Kosnita* menggunakan *circumcenter* pada ΔE_aBC



Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Gambar 5. *Multiple Kosnita* menggunakan *circumcenter* melalui *excenter*



Gambar 6. Ketiga garis yang ditarik melalui *excenter* ke Kosnita

teorema Menelaus yang mudah dipahami oleh siswa SMP dan SMA. Adapun untuk pembelajarannya menggunakan aplikasi Geogebra.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan E_a, E_b, E_c adalah *excenter* pada sebarang ΔABC. Selanjutnya dihubungkan ketiga *excenter* ini sehingga terbentuk ΔBCE_a, $\Delta ACE_b, \Delta ABE_c$. Multiple Kosnita K_a terbentuk dari perpotongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut *A*, *B*, dan E_c ke *circumcenter* segitiga BGE_c, AGE_c, dan ABG, dengan *G* adalah *circumcenter* ΔABE_c. Titik K_b terbentuk dari perpotongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut *A*, *C*, dan E_b ke *circumcenter* segitiga CHE_b, AHE_b, dan ACH, dengan *H* adalah *circumcenter* ΔACE_b. Titik K_c terbentuk dari perpotongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut *B*, *C*, dan E_a ke *circumcenter* segitiga CIE_a, BIE_a, dan BCI, dengan *I* adalah *circumcenter* ΔBCE_a.

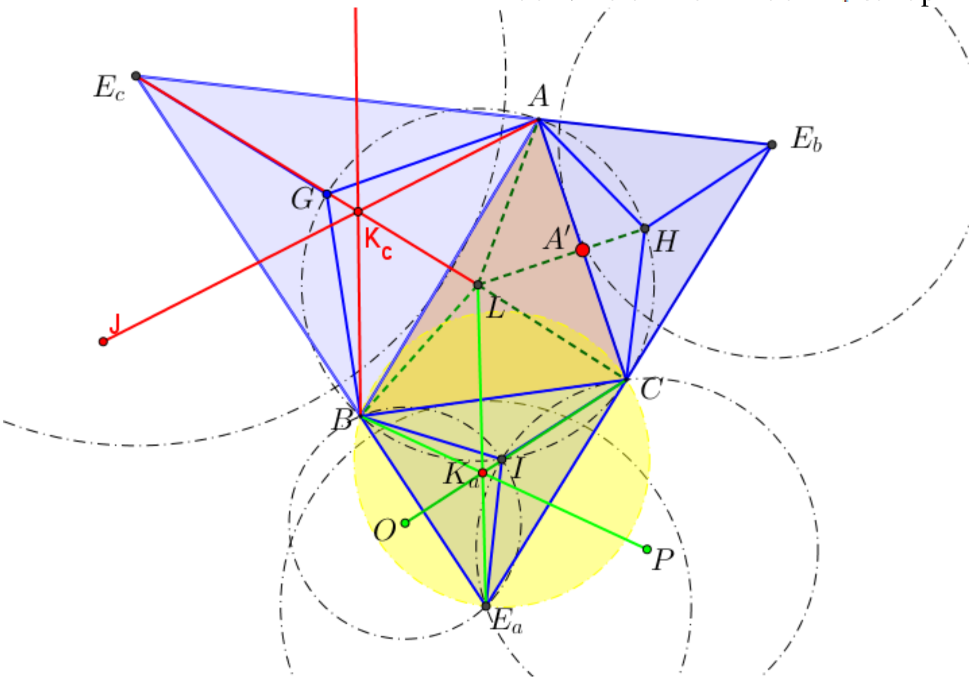
Multiple Kosnita menggunakan *circumcenter* yang melalui *excenter* pada segitiga penulis nyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema (Multiple Kosnita menggunakan *circumcenter* melalui *excenter*). Jika E_a, E_b dan E_c adalah

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

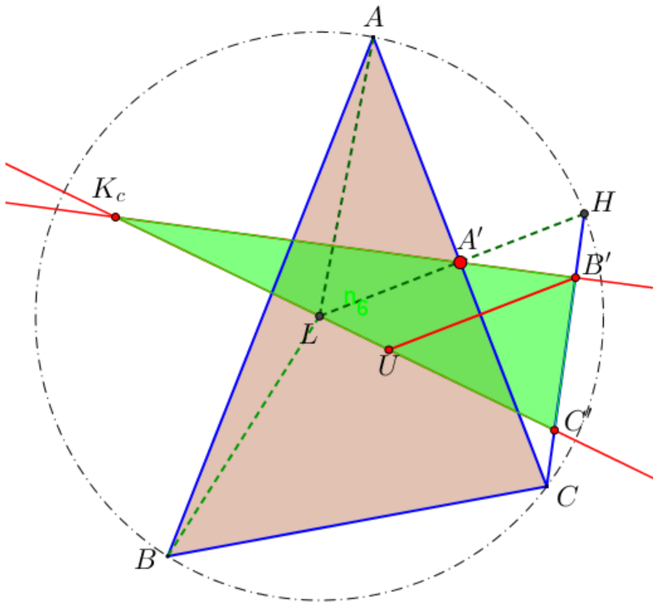
excenter pada sebarang ΔABC, dan K_a, K_b dan K_c masing-masing titik Kosnita menggunakan *circumcenter-circumcenter* dari ΔE_aBC, ΔE_bAC, dan ΔE_cAB, maka garis E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c kongkuren di *circumcenter* ΔABC.

Bukti: Untuk menunjukkan E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c kongkuren di satu titik. Dalam hal ini titik L, cukup

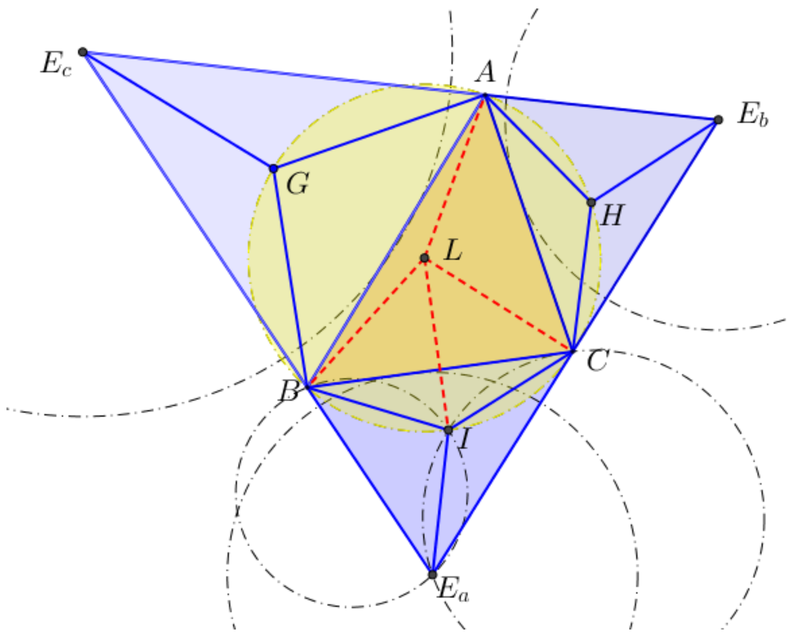


Gambar 7. Titik L adalah *circumcenter* ΔABG

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 8. Titik *L*, A', dan *H* segaris pada $\Delta K_c B'C'$



Gambar 9. *L circumcenter* ΔABC

ditunjukkan bahwa *L* adalah *circumcenter* $\Delta ABG, \Delta AHC,$ dan ΔBCI.

1. Akan dibuktikan *circumcenter* dari ΔABG, ΔAHC, dan ΔBCI adalah sama, serta proses pembuktiannya menggunakan konsep kekongruenan segitiga.

Pada gambar 7, misalkan L adalah *circumcenter* ΔABG, sehingga $AL = BL = GL$. Akan dibuktikan L *circumcenter* ΔAHC.

Akan ditunjukkan L, A', dan H segaris. Ambil A' titik tengah garis AC. Sehingga $AA' = CA'$. Akibatnya $\Delta AHA' \cong \Delta CHA'$. Akan ditunjukkan bahwa titik L, A' dan H segaris. Perpanjang garis K_cL dan K_cA' sehingga memotong HC di titik C' dan B'.

Pandang $\Delta K_cB'C'$. H terletak pada perpanjangan sisi $B'E'$. L terletak pada sisi K_cC' dan A' terletak pada sisi K_cB'. Tarik garis sejajar melalui B' berpotongan dengan garis K_cC' di titik U. Seperti pada Gambar 8, sehingga diperoleh $\Delta K_cLA' \sim \Delta K_cUB'$, yang mengakibatkan

$$\frac{K_cA'}{A'B'} = \frac{K_cL}{LU}$$

Dari $\Delta C'B'U \sim C'HL$, mengakibatkan

$$\frac{B'H}{HC'} = \frac{UL}{LC'}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{K_cA'}{A'B'} \cdot \frac{B'H}{HC'} \cdot \frac{C'L}{LK_c} = \frac{K_cL}{LU} \cdot \frac{UL}{LC'} \cdot \frac{C'L}{LK_c}$$

$$= -1$$

Berdasarkan teorema Menelaus, maka titik L, A', dan H segaris. Oleh karena itu, $\Delta ALH \cong \Delta CLH$ sehingga diperoleh

$$AL = CL = LH.$$

Terbukti bahwa L *circumcenter* ALH.

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan L adalah *circumcenter* ΔBCI. Jadi, L adalah *circumcenter* $\Delta ABG, \Delta AHC,$ dan ΔBCI.

2. Akan dibuktikan L adalah *circumcenter* dari ΔABC. Dari bukti 1 diperoleh bahwa titik sudut A, B dan C berjarak sama ke L, yaitu titik ketiga *circumcenter* $\Delta ABG, \Delta AHC,$ dan ΔBCI. Jadi, jika L adalah *circumcenter* ΔABG, ΔAHC, dan ΔBCI, maka L juga merupakan *circumcenter* ΔABC. Seperti terlihat pada Gambar 8.

3. Akan dibuktikan ketiga garis E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c berpotongan di titik menggunakan teorema Menelaus. Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa titik E_a, K_a, dan L segaris, E_b, K_b, dan L segaris, serta E_c, K_c, dan L segaris.

Akan ditunjukkan E_a, K_a, dan L segaris. Perpanjang garis E_cK_c sehingga memotong E_aE_b di titik E' sehingga terbentuk $\Delta K_cPE'$. E_a terletak pada perpanjangan sisi PE'. K_a terletak pada sisi PK_c dan L terletak pada sisi K_cE'. Tarik garis sejajar melalui P berpotongan dengan garis K_cE' di titik Q.

Seperti pada Gambar 9, sehingga diperoleh $\Delta K_cK_aL \sim \Delta K_cPQ$, yang mengakibatkan

$$\frac{K_cK_a}{K_aP} = \frac{K_cL}{LQ}$$

Dari $\Delta PE'Q \sim E_aE'L$, mengakibatkan

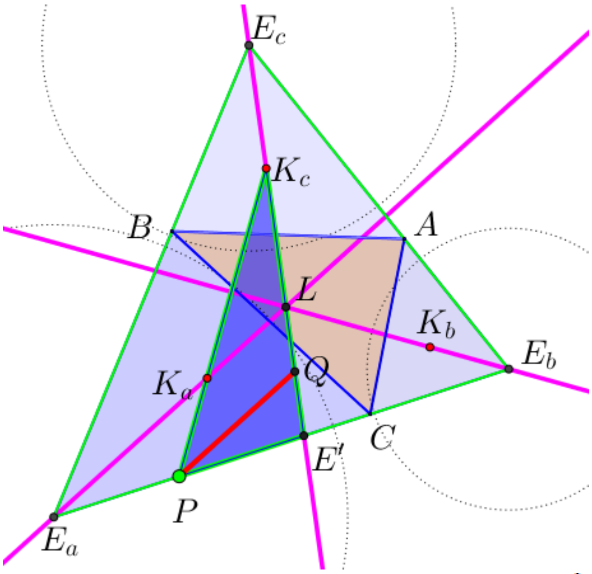
$$\frac{PE_a}{E_aE'} = \frac{QL}{LE'}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{K_cK_a}{K_aP}\cdot\frac{PE_a}{E_aE'}\cdot\frac{E'L}{LK_b}=\frac{K_bL}{LQ}\cdot\frac{QL}{LE'}\cdot\frac{E'L}{LK_b}$$
$$=-1$$

Berdasarkan teorema Menelaus, maka titik E_a, K_a dan L segaris.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan titik E_b, K_b, L dan E_c, K_c L segaris. Jadi, E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c kongkuren di L. Berdasarkan bukti 2, Ladalah *circumcenter* ΔABC. Jadi, terbukti bahwa garis E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c adalah kongkuren di *circumcenter* ΔABC.



Gambar 10. E_a, K_a, L segaris pada $\Delta K_cPE'$

SIMPULAN

Pengembangan teorema *Kosnita* dengan *multiple Kosnita* menggunakan *circumcenter-circumcenter* melalui *excenter* menghasilkan konstruksi yang kongkuren. Kemudian dari kekongkurenan ini dapat mengakibatkan *orthologic* antara segitiga *excentral* dengan segitiga Kosnita, serta *kolinearitas* beberapa titik.

DAFTAR RUJUKAN

D. Grinberg. 2003. On the Kosnita point and the reflection triangle. *Forum Geometricorum*. *3*. 105-111.

Mashadi. 2015. *Geometri Lanjut.* Pekanbaru: UR Press.

Mashadi, Gemawati, S., Hasriati & Herlinawati, H. 2015. Semi excircle of quadrilateral. *JP Journal Mathematics Sciences*. *15* (1 & 2): 1-13.

Mashadi, Gemawati, S., Hasriati & Januarti, P. 2015. Some result

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

on excircle of quadrilateral. *JP Journal Mathematics Sciences*. 14 (1 & 2): 41-56.

Mashadi. 2016. *Pengajaran Matematika*. Riau: UR Press.

Nurahmi. 2015. *Pengembangan teorema Ceva dan teorema Menelaus pada segiempat*. Tesis. Pekanbaru: Universitas Riau.

I. Patrascu. 2010. O generalizare a teoremei lui Cosnita. *Smarandhace Nations Journal*. 1: 102-103.

M. D. Villiers. 2009. From the Fermat point to the Villiers points of a triangle. *Proceedings of the 15th Annual AMESA Congress* (pp. 1-8). University of Free State, Bloemfontein.

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 135 - 145
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp