Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGEMBANGAN TEOREMA *KOSNITA* DENGAN MENGGUNAKAN *INCENTER*

Misra Herlina[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: misraherlina78@gmail.com

Abstract

Kosnita's Theorem generally constructed with circumcenter showing the concurrency between each vertex with three circumcenter. Namely stating that the line connected from the point of the triangle circumcenter of triangle *ABC* with *BCO, CAO* and *ABO* (*O* circumcenter of triangle *ABC*) respectively are concurrent. Kosnita's Theorem in this paper will be developed using the incenter is constructing Kosnita theorem by using incenter of *ABC* triangle with circumcenter of triangle *BCO, CAO* and *ABO*. The result are concurrent . In the process of proving it will only use the concept of congruency and other concepts are very simple so it can be easily understood by high school students.

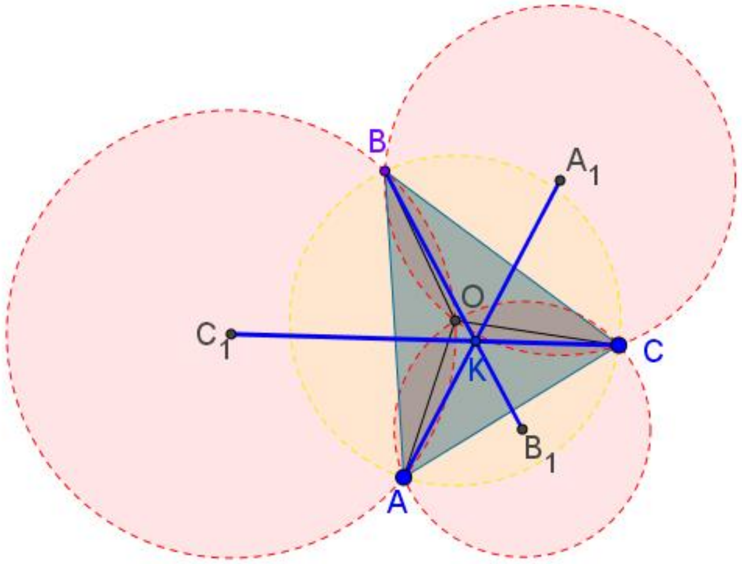
Keywords: Kosnita's Theorem, circumcenter, incenter

Abstrak

Teorema *Kosnita* pada umumnya dikonstruksi dengan *Circumcenter* yang menunjukkan konkurensi antara masing-masing titik sudut dengan tiga buah *Circumcenter*. Yaitu menyatakan bahwa garis yang dihubungkan dari sudut segitiga *ABC* dengan *Circumcenter* segitiga *BCO,CAO* dan *ABO* (*O Circumcenter* segitiga *ABC*) masing-masing adalah konkuren. Pada makalah ini teorema Kosnita akan dikembangkan dengan menggunakan *Incenter* yaitu mengkonstruksi teorema *Kosnita* dengan menggunakan *Incenter* segitiga *ABC* dengan. Hasilnya terdapat konstruksi yang konkuren . Dalam proses pembuktiannya hanya akan menggunakan konsep kesebangunan dan konsep lain yang sangat sederhana sehingga dapat dengan mudah dipahami siswa tingkat sekolah menengah

Kata kunci: Teorema *Kosnita, Circumcenter, Incenter*

Pada pelajaran Matematika SMP dan SMA sudah diperkenalkan garis-garis istimewa seperti garis bagi, garis berat, garis tinggi dan garis sumbu. Garis-garis tersebut masing-masing berpotongan di satu titik (Mashadi, 2012). Ketiga garis bagi berpotongan di satu titik yang disebut Incenter yang merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga. Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga tersebut dan titik pusat dari lingkaran dalam tersebut adalah *Incenter* (Mashadi, 2015). Ketiga garis sumbu berpotongan di satu titik yang disebut *Circumcenter* yang merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga (Mashadi, 2016). Lingkaran luar suatu segitiga *ABC* adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut dan titik pusat dari lingkaran luar tersebut adalah circumcenter (Wardiah, 2016; Zukrianto). Ketiga garis berat juga

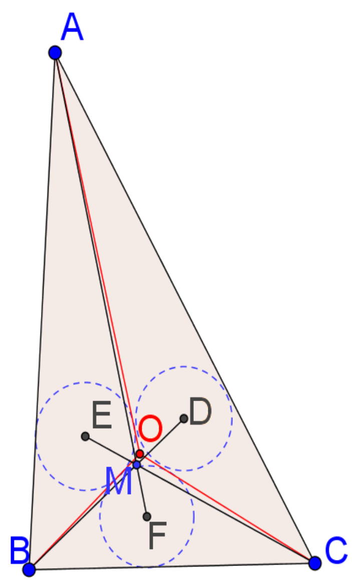


Gambar 1. Ilusrasi teorema *Kosnita*

berpotongan di satu titik yang disebut *Centroid* (Mashadi, 2015).

Salah satu teorema yang berkaitan dengan salah satu garis-garis istimewa tersebut adalah Teorema *Kosnita*. Teorema *Kosnita* awalnya ditemukan oleh matematikawan asal Rumania, Cezar Cosnita (1910-1962) pada tahun 1941 (Grinberg, 2003; Patrascu, 2010; Rigby, 1997). Teorema *Kosnita* menyatakan bahwa garis yang dihubungkan dari sudut segitiga *ABC* dengan *Circumcenter* segitiga *BCO,CAO* dan *ABO* (*O Circumcenter* segitiga *ABC*) masing-masing konkuren (Villiers, 1995) seperti pada gambar 1.

Pada tahun 1996 teorema *Kosnita* dikembangkan serta dibukti-kan oleh Michael de Villers. Pengembangan de Villers ini dikenal dengan nama *a Dual to Kosnita's Theorem* (Villiers, 1996). Teorema ini menyatakan bahwa garis yang dihubungkan dari sudut segitiga *ABC* dengan *Incenter* segitiga *BCO,CAO* dan *ABO* (*O* Incenter segitiga *ABC*) masing-masing konkuren seperti pada gambar 2.



Gambar 2 : Ilustrasi Dual *Kosnita*

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Hal ini menimbulkan ide dan rasa ingin tahu bagi peneliti untuk mengembangkan teorema *Kosnita* dengan menggunakan titik potong garis istimewa yang lain pada segitiga.

Peneliti akan mengkonstruksikan teorema *Kosnita* dengan menggunakan *Incenter-Circumcenter.*

Masalah yang akan dikaji adalah membuktikan garis yang menghubungkan sudut segitiga *ABC* dengan *Circumcenter* segitiga *BCO,CAO* dan *ABO* (*O Incenter* segitiga *ABC*) adalah konkuren.

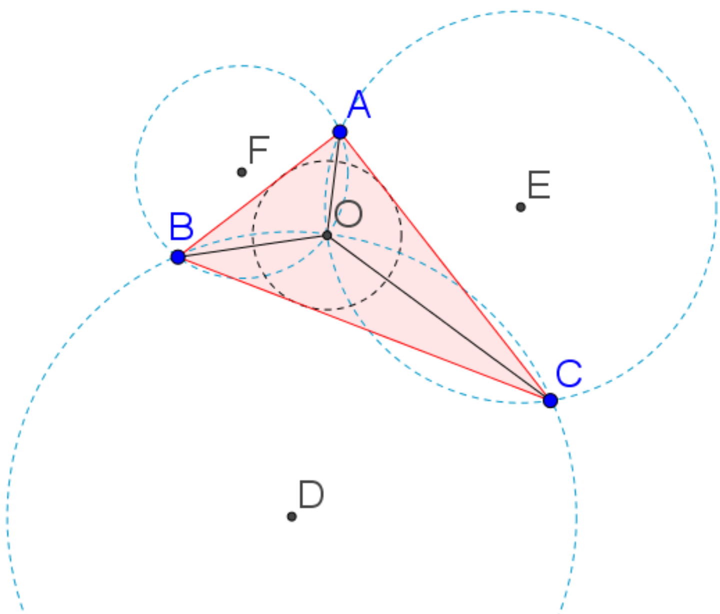
Dalam pembuktian penelitian ini akan menggunakan konsep kesebangunan dan konsep yang sangat sederhana yang banyak dibahas dalam (Mashadi, 2017) sehingga sangat mudah dipahami siswa sekolah tingkat menengah.

METODE

Teorema Kosnita dikonstruksi melalaui circumcenter segitiga *ABC* dengan Circumcenter segitiga *BCO, CAO* dan *ABO* (*O* Circumcenter segitiga *ABC*). Sedangkan Dual Kosnita dikonstruksi melalui Incenter segitiga *ABC* dengan Incenter segitiga *BCO,CAO* dan *ABO* (*O* Incenter segitiga *ABC*).

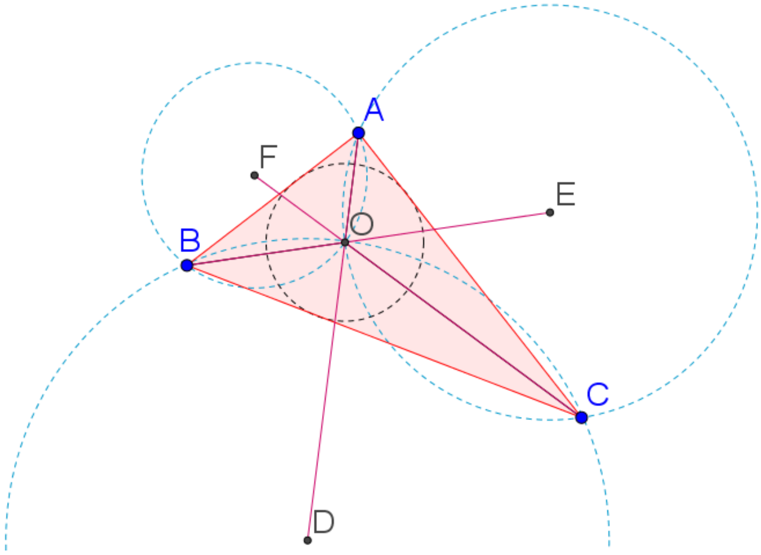
Pada penelitian ini dikembangkan dengan menggunakan *Incenter-Circumcenter* dan akan ditunjukkan kekonkurensinya. Adapun langkah-langkah dalam pengkonstruksian pengembangan teorema *Kosnita* tersebut adalah sebagai berikut :

1. Buat segitiga *BCO, CAO* dan *ABO* dengan *O* Incenter segitiga *ABC.* Kemudian buat lagi titik *Circumcenter* dari masing-masing segitiga tersebut yaitu titik *D*, *E* dan *F* seperti pada gambar 3.

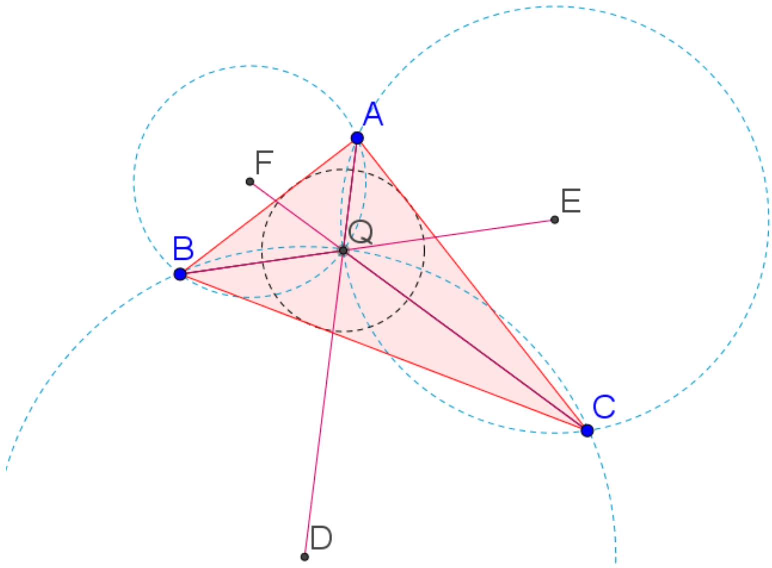


Gambar 3. Titik Circumcenter *BCO,CAO* dan *ABO*

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 4. *Incenter - Circumcenter*



Gambar 5. *CF* dan *BE* berpotongan dititik *Q*

2. Hubungkan titik *Circumcenter* tersebut ke masing-masing titik sudut segitiga *ABC* yang terletak di depan sudutnya. Ketiga garis tersebut konkuren di titik *O* (gambar 4) .
3. Untuk membuktikan ketiga garis konkuren digunakan konsep kese-bangunan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pengembangan dari teorema Kosnita dengan menggunakan *Incenter–circumcenter* peneliti me-nyatakan dalam teorema sebagai berikut :

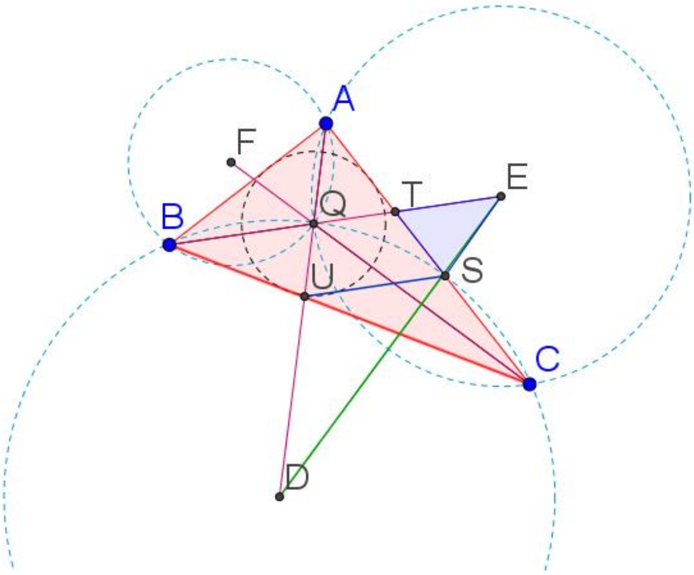
Teorema (*Incenter-Circumcenter*). Garis yang menghubungkan titik sudut

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

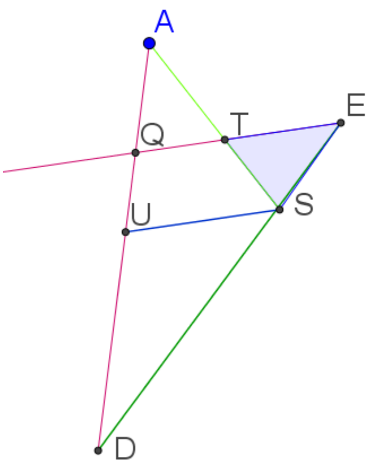
A, *B* dan *C* dari segitiga *ABC* dengan Circumcenter *BCO*,*CAO* dan *ABO* (*O* Incenter segitiga *ABC*) adalah konkuren.

Bukti: **1.** Misalkan *CF* dan *BE* berpotongan di titik *Q* (Gambar 5), akan ditunjukkan *AD* melalui *Q* .

Pada gambar 6, hubungkan *ED* sehingga memotong *AC* di *S.* Perhatikan Δ *TES*, perpanjangan dari ketiga sisinya berpotongan di titik *A*, *Q* dan *D* pada garis *AD*, akan ditunjukkan bahwa *A*, *Q* dan D segaris. Perhatikan Δ *QDE*, tarik garis sejajar dari titik *S* ke *AD* misalkan titik *U* sedemikian hingga *SU* // EQ.



Gambar 6. *SU* // EQ



Gambar 7. Pembuktian *A*, *Q* dan *D* segaris

Perhatikan Δ *QDE* dan Δ *UDS* pada gambar 7, $\angle QDE = \angle UDS$, karena *SU* // EQ maka $\angle QED = \angle USD$ dan $\angle EQD = \angle SUD$. Dari kesebangunan Sd–Sd–Sd, maka $\Delta\, QDE \sim \Delta\, UDS$ sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{US}{QE} = \frac{DS}{DE}$$

$$US = \frac{DS.QE}{DE} \qquad (1.1)$$

Seperti memperoleh persamaan (1.1), ditunjukkan $\Delta\, UAS \sim \Delta\, QAT$ sehingga diperoleh

$$\frac{US}{QT} = \frac{AS}{AT}$$

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

$$US = \frac{QT.AS}{AT} \qquad (1.2)$$

Dari persamaan (1.1) dan (1.2) diperoleh

$$\frac{DS.QE}{DE} = \frac{QT.AS}{AT}$$

$$QE.AT.DS = QT.AS.DE$$

$$\frac{QE.AT.DS}{QT.AS.DE} = 1$$

$$\frac{EQ}{QT}.\frac{TA}{AS}.\frac{SD}{DE} = -1 \qquad (1.3)$$

Karena memenuhi teorema Transversal menelaus, maka terbukti bahwa titik *A*, *Q* dan *D* adalah segaris.

2. Akan ditunjukkan titik $Q=O$. Misalkan *CF* dan *BE* berpotongan di titik *O* (Gambar 4), dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa *AD* juga melalui O , maka

$$\frac{EO}{OT}.\frac{TA}{AS}.\frac{SD}{DE} = -1$$

$$\frac{EO}{OT} = -\frac{AS}{TA}.\frac{DE}{SD} \qquad (1.4)$$

Sedangkan dari persamaan (1.3) diketahui bahwa

$$\frac{EQ}{QT}.\frac{TA}{AS}.\frac{SD}{DE} = -1$$

$$\frac{EQ}{QT} = -\frac{AS}{TA}.\frac{DE}{SD} \qquad (1.5)$$

Dari persamaan (1.4) dan (1.5)

$$\frac{EO}{OT} = -\frac{AS}{TA}.\frac{DE}{SD} = \frac{EQ}{QT}$$

Ini mengatakan bahwa $Q = O$.

Dari **1** dan **2** dapat disimpulkan bahwa garis *AD*, *BE* dan *CF* merupakan garis bagi dari Δ *ABC*, maka ketiga garis tersebut adalah konkuren.

SIMPULAN

Pengembangan teorema *Kosnita* dengan menggunakan *Incenter* menghasilkan konstruksi yang konkuren yaitu pengkonstruksian *Incenter* dengan *Circumcenter*. Peneliti menyarankan untuk mengembangkan temuan lain pada pengkonstruksian teorema Kosnita dan mencari hubungan *orthologic* antara segitiga asal dengan segitiga *kosnita* serta *kolinearitas* antara beberapa titik.

DAFTAR RUJUKAN

A. Wardiah, Mashadi, S. Gemawati. 2016. Relationship Of Lemoine Circle With A Symmedian Point. *Journal of Mathematical Sciences*. 17(2): 23-33.

D. Grinberg. 2003. On the Kosnita Point and the Reflection Triangle. *Forum Geometricorum* 3: 105-111.

I. Patrascu. 2010. O Generalizare a teoremei lui Cosnita. *Smarandhace Nations Journal*. 1: 102-103.

Mashadi. 2012. *Geometri*. Pekanbaru: Pusbangdik Universitas Riau.

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Mashadi. 2015.*Geometri Lanjut*, Pekanbaru: UR Press.

Mashadi, S. Gemawati, Hasriati, H. Herlinawati. 2015. Semi excircle of quadrilateral. *JP Journal. Math.* 15 (1 & 2): 1-13.

Mashadi, S. Gemawati, Hasriati, P. Januarti. 2015. Some result on excircle of quadrilateral. *JP J. Math*. 14(1 & 2): 41-56.

Mashadi. 2016. *Pengajaran Matematika*. Pekanbaru: UR Press.

Mashadi, C. Valentika, S. Gemawati. 2017. Development of Napoleon's Theorem on the Rectangles in Case of Inside Direction. *International J. of Theoretical and Applied Math*. 3(2): 54-57.

Zukrianto, Mashadi dan S.Gemawati. 2016. A Nonconvex Quadrilateral and Semi Gergonne. *Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 6 (2): 111-124

.

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp