Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGAJARAN *MULTIPLE KOSNITA* MENGGUNAKAN *ICENTER* MELALUI *EXCENTER* BAGI SISWA SEKOLAH MENENGAH

Pujiati[1], Mashadi[2], M.D.H. Gamal[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: pujiatifahmi@gmail.com

Abstract

Kosnita's theorem usually constructed with the circumcenter of the triangle. This theorem is show that the lines joining the vertices to circumcenters of the triangle. In this paper, it can be constructed Kosnita using excenter and incenter in several case. Then, if this point linked to excenter, the lines congcurrent in one point. The result of this construction named Multiple Kosnita, that is incenter-circumcenter, incenter-incenter and incenter-centroid. In the process of proving it will only use the concept of congruency and other concepts are very simple so it can be easily understood by high school students.

Keyword: Kosnita's Theorem, excenter, incenter, circumcenter

Abstrak

Teorema Kosnita pada umumnya dikontruksikan dengan circumcenter, yaitu menunjukkan konkurensi dari tiga garis yang menghubungkan tiga circumcenter dengan masing-masing titik sudut segitiga. Pada tulisan ini akan dikonstruksikan Kosnita dengan menggunakan excenter yang dihubungkan menjadi segitiga, selanjutnya dari segitiga luar dikontruksikan teorema Kosnita dengan menggunakan incenter dalam berbagai kasus. Kemudian akan ditunjukkan konkurensi dari perpotongan ketiga garis yang melalui excenter dan titik kosnita (multiple kosnita). Hasilnya terdapat 3 kontruksi yang konkuren, yaitu: incenter-circumcenter, incenter-incenter dan incenter-centroid. Dalam proses pembuktiannya hanya akan menggunakan konsep kesebangunan dan konsep lain yang sangat sederhana sehingga dapat dengan mudah dipahami siswa tingkat sekolah.

Kata kunci: teorema *Kosnita, excenter, incenter, circumcenter*

Teorema Kosnita pertama sekali diperkenalkan oleh matematika-wan Rumania , Cezar Cosnita (1910 - 1962) pada tahun 1941 dengan konstruksi *circumcenter-circumcenter*, sedangkan yang membuktikan kon-kuren pada teorema Kosnita adalah Michael de Villiers pada tahun 1996 dengan menggunakan generalisasi Fermat-Terricelli. Pada waktu yang sama Michael de Villiers juga mengemukakan dual Kosnita dengan konstruksi *incenter-incenter* seperti yang tertulis dalam (Patrascu, 2010; Villers, 1995; Villers, 1996).

Pada teorema Kosnita akan ditunjukkan konkuren garis pada sebuah titik yang disebut titik Kosnita, untuk penamaan titik Kosnita diperkenalkan oleh Jhon Rigby pada tahun 1997 yang termuat dalam (Grinberg, 2003; Rigby, 1997).

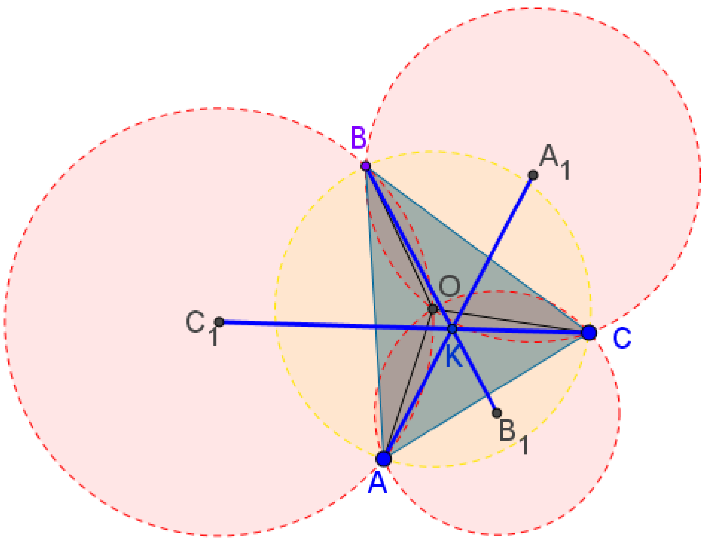
Dalam (Patrascu, 2010) dan (Villers, 1996) dinyatakan bahwa teorema Kosnita terbentuk jika *circumcenter* ΔABC sebut titik O, di hubungkan ke masing-masing titik sudut ΔABC akan membentuk ΔBCO, ΔACO, dan ΔABO. Selanjutnya *circumcenter* ΔBCO, ΔACO dan ΔABO sebut titik A_1, B_1 dan C_1 hubungkan ke titik A, B dan C secara berurutan, maka ketiga garis AA_1, BB_1 dan CC_1 konkuren, seperti pada Gambar 1.

Selain itu terdapat juga konstruksi *incenter-incenter* yang dikenal dengan dual Kosnita seperti yang terdapat dalam (Villers, 1996) dan (Villers 2009). Dual Kosnita ini terbentuk jika dikonstruksi melalui *incenter* ΔABC sebut titik O, dihubungkan ke masing-masing titik sudut ΔABC akan membentuk ΔBCO, ΔACO dan ΔABO. Selanjutnya *incenter* ΔBCO, ΔACO dan ΔABO sebut titik A_1, B_1 dan C_1 hubungkan ke titik A, B dan C secara berurutan, diperoleh garis AA_1, BB_1 dan CC_1 konkuren di titik K, pada Gambar 2

Dalam (Mashadi, 2012) dan (Mashadi, 2015) dinyatakan bahwa lingkaran singgung pada suatu segitiga merupakan lingkaran yang menying-gung sebuah sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya, terdapat

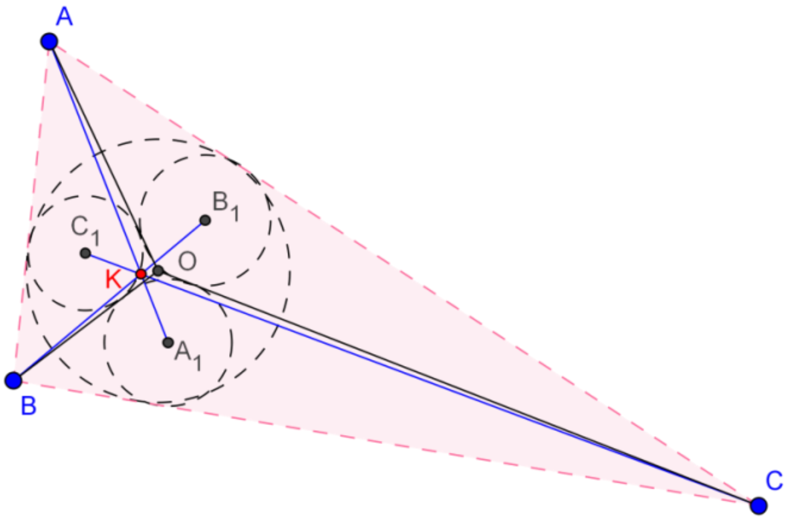
tiga buah lingkaran singgung, yaitu lingkaran singgung yang menying-gung sisi BC, AC dan AB.

Pada artikel ini, teorema Kosnita dikembangkan lagi, yakni jika pusat lingkaran singgung pada sisi BC, AC dan AB sebut titik E_a, E_b dan E_c secara berurutan dihubungkan akan membentuk segitiga *excentral*. Selan-jutnya dikonstruksi *multiple* Kosnita menggunakan *incenter-circumcenter* pada ΔBCE_a, ΔACE_b dan ΔABE_c seperti pada Gambar 3. Akan ditunjukkan bahwa ketiga garis yang diperpanjang melalui *excenter* ΔABC dan masing-masing titik Kosnita berpotongan di satu titik (konkuren).

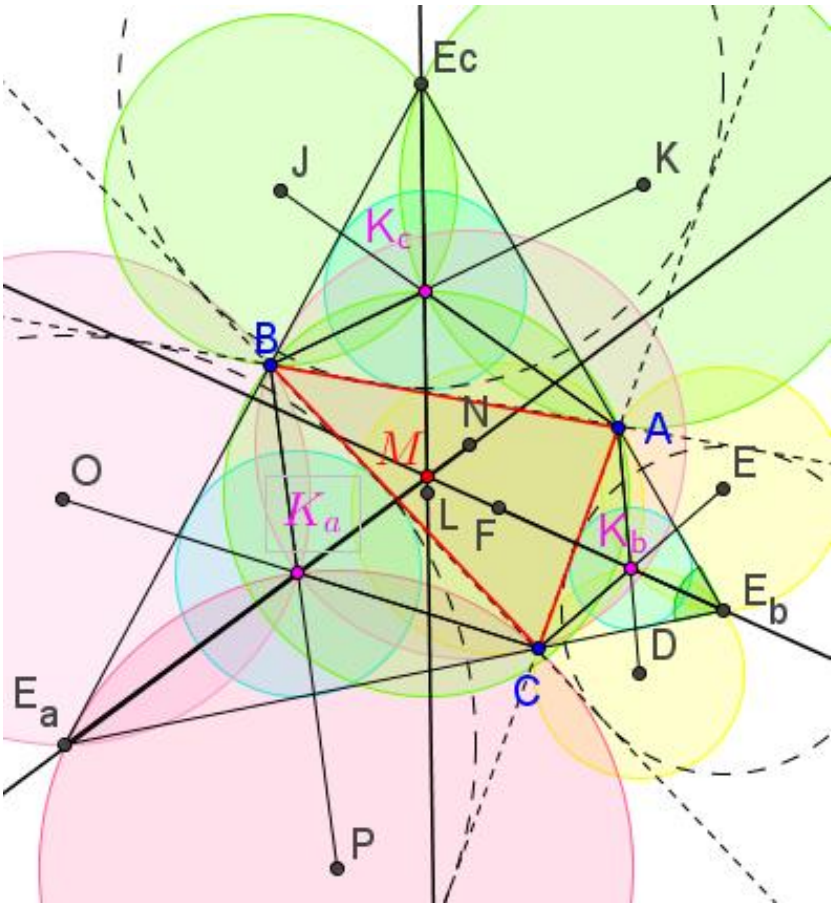


Gambar 1. Teorema Kosnita pada segitiga

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 2. Ilustrasi dual Kosnita



Gambar 3. Ilustrasi *multiple* Kosnita menggunakan *incenter-circumcenter* melalui *excenter*

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

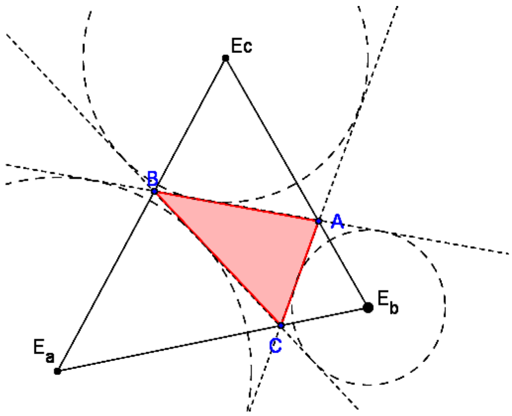
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Pembuktian kekonkurenan ketiga garis pada segitiga digunakan konsep geometri sederhana yang sudah dipelajari siswa SMP dan SMA. Diantaranya menggunakan konsep kesebangunan segitiga dan konsep kolinear pada *excenter* suatu segitiga dengan *incenter* segitiga *excentral*.

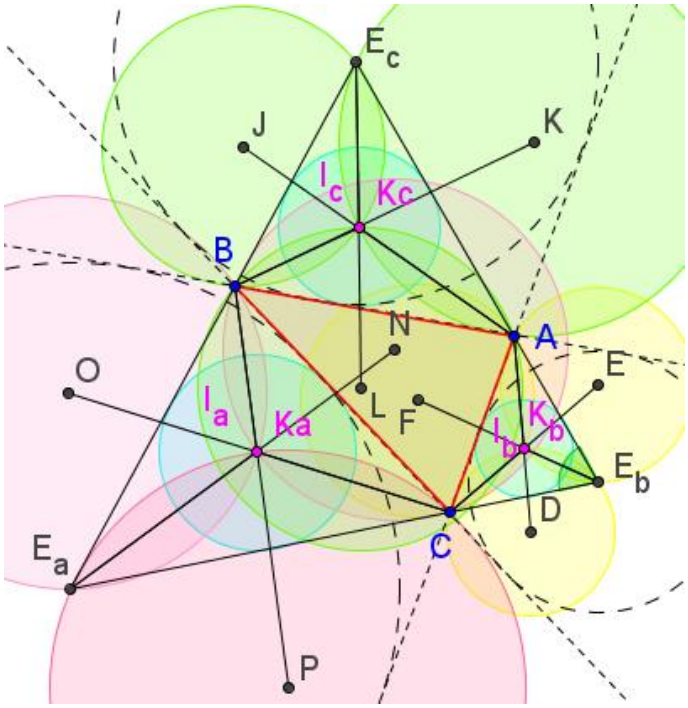
METODE

Pada artikel ini akan dilukiskan *multiple* Kosnita menggunakan *incenter-circumcenter*, yaitu membuat titik Kosnita pada ΔBCE_a, ΔACE_b, dan ΔABE_c. Akan ditunjukkan ketiga garis yang diperpanjang melalui *excenter* ΔABC dan masing-masing titik Kosnita berpotongan di satu titik. Adapun langkah-langkah dalam Multiple Kosnita menggunakan *incenter-circumcenter* adalah sebagai berikut:

1. Melukis lingkaran singgung luar ΔABC. Titik E_a, E_b dan E_c merupakan pusat lingkaran singgung. Hubungkan titik E_a, E_b dan E_c sehingga membentuk $\Delta BCEa$, $\Delta ACEb$ dan $\Delta ABEc$ seperti pada Gambar 4.

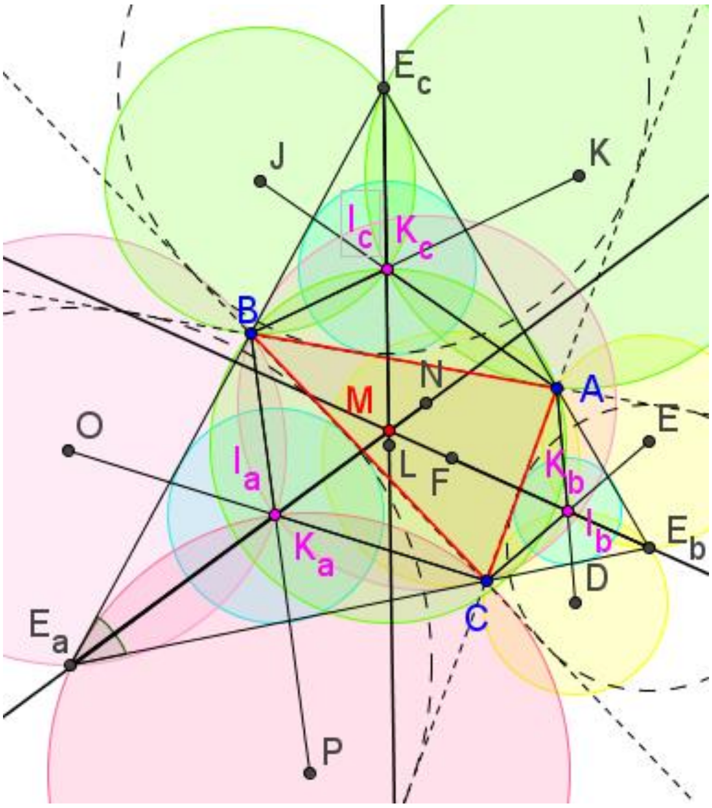


Gambar 4. Ilustrasi segitiga *excentral*



Gambar 5. Ilustrasi *multiple* Kosnita *incenter-circumcenter*

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 6. *Multiple* Kosnita *incenter-circumcenter* melalui *excenter*

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

2. Mengkonstruksi titik Kosnita ΔBCE_a, ΔACE_b dan ΔABE_c melalui *incenter-circumcenter*, ilustrasi pada Gambar 5. Titik I_a, I_b dan I_c masing-masing adalah *incenter* ΔBCE_a, ΔACE_b dan ΔABE_c. Dari ketiga titik sudut E_a, B dan C dihubungkan ke *incenter* I_a, sehingga diperoleh ΔCI_aE_a, ΔBI_aE_a dan ΔBCI_a. Kemudian dibuat circumcenter dari masing-masing ΔCI_aE_a, ΔBI_aE_a, dan ΔBCI_a misalkan titik P, O dan N. Hubungkan masing-masing cir-cum-center ke titik sudut yang ada dihadapannya. Titik P ke B, O ke C dan N ke E_a. Terlihat bahwa ketiga garis konkuren di titik Kosnita K_a.

Dengan cara yang sama, untuk mengkonstruksi titik K_b dan K_c pada ΔACE_b, ΔABE_c.

3. Membuat garis yang diperpanjang dari *excenter* E_a, E_b dan E_c melalui titik Kosnita K_a, K_b dan K_c secara berurutan, akan ditunjukkan konkuren di titik M, ilustrasi terdapat pada Gambar 6.

Dari langkah-langkah di atas, pembuktian kekonkurenan pada *Mul-tiple* Kosnita ini akan digunakan konsep kesebangunan pada segitiga yang mudah dipahami oleh siswa SMP dan SMA. Adapun untuk pembela-jarannya menggunakan aplikasi Geogebra.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan E_a, E_b dan E_c adalah *excenter* pada sebarang ΔABC. Selanjutnya dihubungkan ketiga *excenter* ini sehingga terbentuk ΔBCE_a, ΔACE_b dan ΔABE_c. Multiple Kosnita K_a terbentuk dari perpo-tongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut B, C dan E_a ke *circumcenter* segitiga CI_aE_a, BI_aE_a dan BCI_a, dengan I_a adalah *incenter* ΔBCE_a. Titik K_b terbentuk dari perpotongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut A, C, dan E_b ke *circumcenter* segitiga CI_bE_b, AI_bE_b dan ACI_b, dengan I_b adalah *incenter* ΔACE_b. Titik K_c terbentuk dari perpotongan ketiga garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut A, B dan E_c ke *circumcenter* segitiga BI_cE_c, AI_cE_c dan ABI_c, dengan I_c adalah *incenter* ΔABE_c.

Multiple Kosnita mengguna-kan *incenter* yang melalui *excenter* pada segitiga peneliti nyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema (Multiple Kosnita meng-gunakan *incenter* melalui *excenter*). Jika E_a, E_b dan E_c adalah *excenter* pada sebarang ΔABC, dan I_a, I_b dan I_c masing-masing incenter ΔBCE_a, ΔACE_b *dan* ΔABE_c serta K_a, K_b dan K_c masing-masing titik Kosnita menggunakan *incenter-circumcenter* dari ΔE_aBC, ΔE_bAC dan ΔE_cAB, maka garis E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c konkuren di *incenter* $\Delta E_aE_bE_c$.

Bukti: Untuk menunjukkan E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c konkuren di *incenter* $\Delta E_aE_bE_c$ dalam hal ini titik M, cukup dengan menunjukkan $I_a=K_a$, $I_b=K_b$ dan $I_c=K_c$ karena titik E_a, I_a dan M, titik E_b, I_b dan M, serta titik E_c, I_c dan M segaris (E_aI_a, E_bI_b dan E_cI_c garis bagi pada $\Delta E_aE_bE_c$).

Akan dibuktikan $I_a=K_a$ dengan cara menunjukkan titik E_a, I_a dan N, titik B, I_a dan P, serta C, I_a dan O segaris.

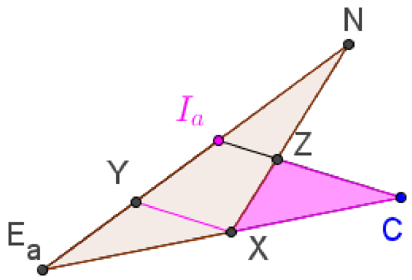
Titik N, O dan P *circumcenter* ΔBCI_a, ΔBE_aI_a dan ΔE_aCI_a. Misal-kan X titik potong BP dan CE_a. Hubungkan N ke X, sehingga memotong CO di Z, sehingga terbentuk ΔCXZ seperti Gambar 7.

Titik E_a, I_a dan N berada pada perpanjangan sisi CX, CZ dan XZ, akan ditunjukkan titik E_a, I_a dan N segaris.

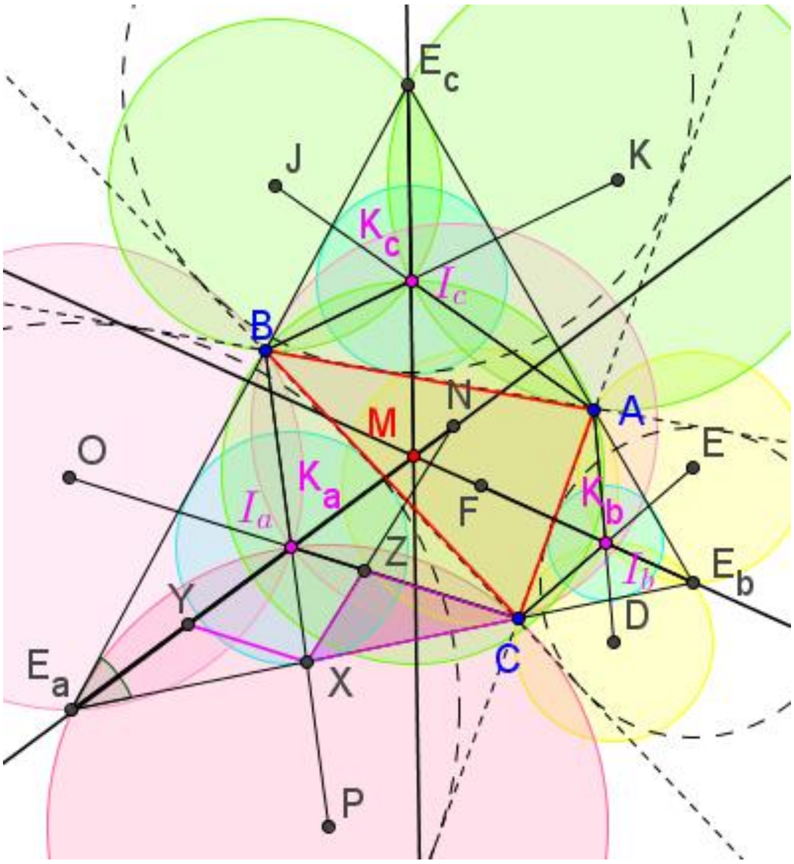
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Perhatikan $\Delta\ NE_aX$, tarik garis sejajar dari titik X ke E_aN misalkan titik Y sedemikian hingga XY // ZI_a.

Perhatikan ΔCE_aI_a dan ΔXE_aY pada Gambar 8, $\angle CE_aI_a = \angle XE_aY$, karena XY // CI_a maka $\angle E_aI_aC = \angle E_aYX$ dan $\angle E_aCI_a = \angle E_aXY$. Dari kesebangun-an Sd–Sd –Sd, maka $\Delta CE_aI_a \sim \Delta XE_aY$ sehingga diperoleh perbandingan sisi



Gambar 8. Pembuktian E_a, I_a dan N segaris



Gambar 7. XY // ZI_a

$$\frac{CI_a}{XY} = \frac{CE_a}{XE_a}$$

$$XY = \frac{CI_a . XE_a}{CE_a} \qquad (1)$$

Seperti memperoleh persamaan (1), ditunjukkan $\Delta\ NYX \sim \Delta\ NI_aZ$ sehing-ga diperoleh

$$\frac{ZI_a}{XY} = \frac{ZN}{XN}$$

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 103 - 110
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

$$XY = \frac{ZI_a.XN}{ZN} \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{CI_a.XE_a}{CE_a} = \frac{ZI_a.XN}{ZN}$$

$$\frac{CI_a.XE_a.ZN}{CE_a.ZI_a.XN} = 1$$

$$\frac{CI_a}{ZI_a}.\frac{ZN}{XN}.\frac{XE_a}{CE_a} = 1$$

$$\frac{CI_a}{I_aZ}.\frac{ZN}{NX}.\frac{XE_a}{E_aC} = -1$$

Karena memenuhi Teorema Transversal Menelaus, maka terbukti bahwa titik E_a, I_a dan N adalah segaris. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan titik B, I_a dan P, serta C, I_a dan O segaris, maka $I_a = K_a$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $I_b = K_b$ dan $I_c = K_c$. Jadi terbukti garis E_aK_a, E_bK_b dan E_cK_c konkuren di *incenter* $\Delta E_aE_bE_c$.

SIMPULAN

Konstruksi teorema Kosnita dengan *multiple* Kosnita mengguna-kan *incenter* melalui *excenter* menghasilkan konstruksi yang konkuren yaitu konstruksi *incenter-incenter*, *incenter-circumcenter* dan *incenter-centroid*. Peneliti menyaran-kan untuk mengembangkan temuan lain pada *multiple* Kosnita dan mencari hubungan *ortologic* antara segitiga *excentral* dengan segitiga Kosnita, serta kolinear antara beberapa titik.

DAFTAR RUJUKAN

D. Grinberg. 2003. On The Kosnita Point and The Reflection Triangle. *Forum Geometri-corum*. (3): 105-111.

Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru.

Mashadi. 2015. *Geometri Lanjut*, UR Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2016. *Pengajaran Mate-matika*. UR Press Pekanbaru.

Mashadi, S. Gemawati, Hasriati and H. Herlinawati. 2015. Semi Excircle of Quadrilateral. *JP Journal. Math. Sci*. 15 (1&2): 1-13.

Mashadi, S. Gemawati, Hasriati and P. Januarti. 2015. Semi Result on Excircle of Quadrilateral. *JP Journal; Math. Sci.* 14 (1 &2): 41-56.

I. Patrascu. 2010. O Generalizare a Teoremei Lui Cosnita, *Smarandhace Nations Journal*. (1) 102-103.

M. D Villiers. 2009. From the Fermat Point to the De Villiers Points of a Triangle. *Proceeding of the 15th. Annual A MESA. Congress. University of free state*.

Silvester, J. R. (2000). Ceva = (Menelaus)^2. *The mathematical gazette*. 84: 268-271.

Weisstein, E. W. (2013). Excentral Triangle. *Math Word Book*. Wolfram Research.

Zukrianto, Mashadi, S.Gemawati. (2016). Quadrilateral and Semi Gergonne Point on it: Some Result and Analysis, *Fundamental J. of Math and Mathematical Sciences*; 6(2); 111-124.